

Chapitre 6 – Propriétés de Pythagore

1- Propriété directe

a) Énoncé

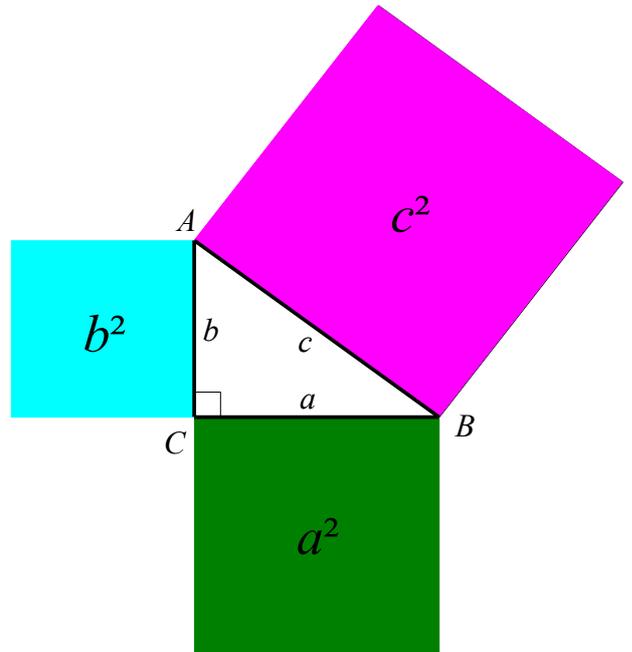
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. ♥

Autrement dit : si ABC est un triangle rectangle en C, alors : $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

b) Interprétation géométrique

L'aire du carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

Pour la figure ci-contre : $c^2 = a^2 + b^2$



c) Démonstration

Soit le carré ABCD de côté $(a + b)$ ci-contre.

Les quatre triangles rectangles grisés sont superposables.

Chacun a une aire égale à : $\frac{1}{2} a b$.

Soit c la longueur de leurs hypoténuses.

Le quadrilatère blanc est donc un losange car tous ses côtés sont de même longueur.

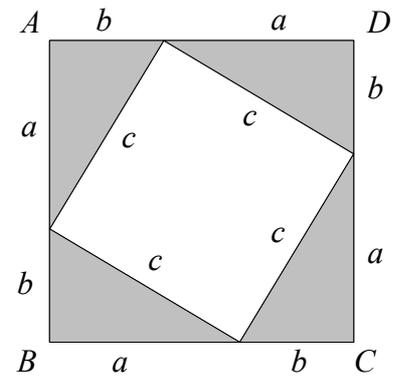
Avec la mesure des angles des triangles gris, on démontre qu'il a un angle droit : c'est donc un carré et son aire est alors c^2 .

L'aire de ABCD peut donc être calculée de deux différentes manières.

$$* \text{ Aire } (ABCD) = (a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$* \text{ Aire } (ABCD) = 4 \left(\frac{1}{2} a b \right) + c^2 = c^2 + 2ab$$

On en déduit que : ~~$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$~~ et donc que : $a^2 + b^2 = c^2$ **CQFD!**



d) Application : calcul d'une longueur

Soit à calculer la longueur de l'hypoténuse d'un triangle ABC rectangle en C tel que : $AC = 4 \text{ cm}$; $BC = 6 \text{ cm}$.

Comme le triangle ABC est rectangle en C, on peut utiliser la propriété de Pythagore.

On a alors l'égalité : $AB^2 = AC^2 + CB^2$

$$AB^2 = 4^2 + 6^2$$

$$AB^2 = 16 + 36$$

$$AB^2 = 52$$

On cherche donc un nombre positif dont le carré est 52.

Par définition, ce nombre est appelé **racine carrée** de 52 et on le note : $\sqrt{52}$.

Par conséquent : $AB = \sqrt{52} \text{ cm}$ (**c'est la valeur exacte !**)

En calculant une valeur approchée, on obtient : **$AB \approx 7,2 \text{ cm}$** .

Définition

Soit a un nombre positif.

On appelle racine carrée de a le nombre positif dont le carré est a .

On note ce nombre \sqrt{a}

Autrement dit : si $a \geq 0$ alors $\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

2- Propriété réciproque

a) Énoncé

Dans un triangle, si le carré d'un des côtés est égal à la somme des carrés des deux autres, alors ce triangle est rectangle et il admet ce côté comme hypoténuse.



Autrement dit

Si A, B, C sont trois points tels que $AB^2 + BC^2 = AC^2$, alors ABC est un triangle rectangle en B.

b) Démonstration

Admise.

3- Étude de la nature rectangulaire d'un triangle

La propriété de Pythagore et sa réciproque caractérisent le triangle rectangle.

Autrement dit, un triangle ne peut être rectangle qu'à condition qu'une certaine égalité sur les carrés soit vérifiée.

Elles permettent donc de démontrer qu'un triangle est rectangle ou ne l'est pas.

* 1^{er} cas

Énoncé

On considère un triangle ABC tel que : $AB = 12 \text{ cm}$; $BC = 13 \text{ cm}$; $CA = 5 \text{ cm}$.

On veut démontrer que ce triangle ABC est un triangle rectangle.

Méthode et raisonnement

On veut démontrer que ce triangle est rectangle : son hypoténuse sera donc [BC] car c'est le plus grand côté.

On calcule alors séparément le carré de BC et la somme des carrés des deux autres côtés.

Rédaction des exercices

$$* BC^2 = 13^2 = 169$$

$$* AB^2 + CA^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

On en déduit que : $BC^2 = AB^2 + CA^2$.

On peut donc utiliser le théorème (**réciproque**) de Pythagore et conclure que : ABC est rectangle en A.

* 2^{ème} cas

Énoncé

On considère un triangle DEF tel que : $DE = 8 \text{ cm}$; $EF = 7 \text{ cm}$; $FD = 4 \text{ cm}$.

On veut déterminer si ce triangle DEF est un triangle rectangle.

Méthode et raisonnement

On ne sait pas si ce triangle est rectangle : on calcule donc séparément les carrés des côtés de DEF.

Rédaction des exercices

$$DE^2 = 8^2 = 64 \text{ ; } EF^2 = 7^2 = 49 \text{ ; } FD^2 = 4^2 = 16 \text{ .}$$

On constate qu'aucun des carrés n'est égal à la somme des deux autres.

D'après le théorème de Pythagore, on en déduit que : le triangle DEF ne peut pas être rectangle.