Chapitre 5 – Calcul littéral – Expressions Algébriques

1- Distributivité

a) Développement

Pour tout nombre a , b , k : $\boxed{k \times (a + b) = k \times a + k \times b}$

Développer un produit, c'est l'écrire sous la forme d'une somme (ou d'une différence).

b) Factorisation

Pour tout nombre a , b , k : $\boxed{\boldsymbol{k} \times a + \boldsymbol{k} \times b = \boldsymbol{k} \times (a + b)}$

Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

c) Réduction

Réduire une expression, c'est l'écrire sous la forme la plus simple possible.

Une expression réduite s'écrit sans parenthèses, après avoir effectué tous les calculs possibles et avoir regroupé les termes de même nature.

Exemples

* $A = 5x + x - 2x$

  $A = x (5 + 1 - 2)$ On regroupe les termes en x à l'aide de la factorisation. **Rappel : $x = 1\,x$.**

  $\underline{A = 4x}$ On effectue le calcul entre parenthèses.

* $B = 4x^2 + 6 + 2x + 3x^2 - 5x + 2$

  $B = 4x^2 + 3x^2 + 2x - 5x + 6 + 2$ On regroupe les termes en x^2 , les termes en x et les termes constants.

  $\underline{B = 7x^2 - 3x + 8}$

* $C = 3 (2x + 1) + x (x - 2)$

  $C = 6x + 3 + x^2 - 2x$ On développe.

  $\underline{C = x^2 + 4x + 3}$

* $D = 2 (4x - 5) - 5 (x - 1)$

  $D = 8x - 10 - 5x + 5$ **L'opposé d'une somme égale la somme des opposés !**

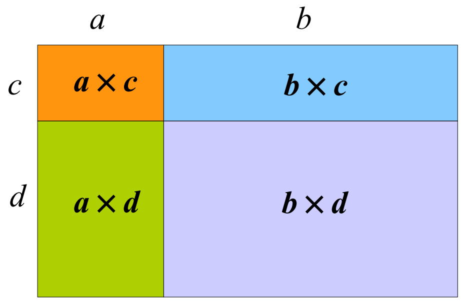
  $\underline{D = 3x - 5}$

2- Distributivité double

Propriété

Pour tout nombre a, b, c, d : $\boxed{(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd}$

Interprétation géométrique



L'aire A du rectangle peut être calculé de deux manières.

* Ses côtés mesurent $(a+b)$ et $(c+d)$

  Son aire est donc : $A = (a+b)(c+d)$

* Ce rectangle est constitué de quatre rectangles.

  Son aire est donc : $A = ac + ad + bc + bd$

Démonstration

Soit $K = c + d$.

On a alors : $(a+b)(c+d) = (a+b) \times K$

On développe : $(a+b)(c+d) = a \times K + b \times K$

On remplace K par $c+d$: $(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$

On développe à nouveau : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ **CQFD !**

Exemples

Développer et réduire les expressions ci-dessous.

* $A(x) = (2x+5)(3x-1)$

  $A(x) = 2x \times 3x + 2x \times (-1) + 5 \times 3x + 5 \times (-1)$

  $A(x) = 6x^2 - 2x + 15x - 5$

  $\underline{A(x) = 6x^2 + 13x - 5}$

* $B(y) = (3y-2)^2$

  $B(y) = (3y-2)(3y-2)$

  $B(y) = 9y^2 - 6y - 6y + 4$

  $\underline{B(y) = 9y^2 - 12y + 4}$

3- Expressions de référence

* Le nombre **consécutif** au nombre entier n est le nombre entier $n + 1$.

* Le nombre **précédent** du nombre entier n est le nombre entier $n - 1$.

* Tout nombre pair P peut s'écrire sous la forme $P = 2\,n$, où n est un nombre entier.

Démonstration

Soit P un nombre pair, c'est-à-dire, par définition, un nombre divisible par 2.

Le reste dans la division euclidienne de P par 2 est donc nul. Appelons n le quotient.

On a : $\begin{array}{c|c} P & 2 \\ \cline{2-2} 0 & n \end{array}$ Et donc : $P = 2 \times n + 0 = 2\,n$ **CQFD !**

* Tout nombre impair I peut s'écrire sous la forme $I = 2\,n + 1$, où n est un nombre entier.

Démonstration

Soit I un nombre impair, c'est-à-dire un nombre qui n'est pas divisible par 2.

Le reste dans la division euclidienne de I par 2 n'est pas nul mais est inférieur strictement à 2 :

il est donc égal à 1. Appelons n le quotient.

On a : $\begin{array}{c|c} I & 2 \\ \cline{2-2} 1 & n \end{array}$ Et donc : $I = 2 \times n + 1$ **CQFD !**

* Tout nombre entier T multiple de 3 peut s'écrire sous la forme $T = 3\,n$, où n est un nombre entier.

Démonstration

Identique à celle d'un nombre pair avec 3 à la place de 2.