Chapitre 6 – Systèmes de deux équations à deux inconnues

Dans tout le chapitre, on se propose de résoudre des systèmes qui se ramènent à : $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$

où a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 sont des nombres donnés et x, y des inconnues.

On cherche donc tous les couples (x ; y) qui vérifient les **deux équations à la fois**.

En particulier, si un couple est solution d'une équation, mais pas de l'autre, il n'est pas solution du système !

1- Méthode de combinaison linéaire

Soit à résoudre le système d'inconnues x et y suivant : $\begin{cases} 5x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

* On multiplie chaque membre de la première équation par un même nombre et chaque membre de la seconde équation par un même nombre de sorte que le coefficient de l'une des inconnues soit le même dans les deux équations.

On multiplie la première égalité par 3 et la seconde par 5. On obtient : $\begin{cases} 15x + 9y = 21 \\ 15x - 10y = 40 \end{cases}$

* On soustrait membres à membres les deux égalités : une inconnue est alors simplifiée et on obtient une seule équation à une seule inconnue, ce qu'on sait résoudre. On connaît ainsi la valeur d'une des deux inconnues.

On soustrait la deuxième égalité à la première :

$(15x + 9y) - (15x - 10y) = 21 - 40$

$\cancel{15x} + 9y - \cancel{15x} + 10y = -19$

$19y = -19$

$y = -1$

* Pour connaître la valeur de l'autre inconnue, il suffit de remplacer la valeur trouvée dans l'une des équations .

On remplace y par sa valeur dans la première égalité : $5x + 3(-1) = 7$

$5x = 10$

$x = 2$

* Vérification. Pour $x = 2$ et $y = -1$:

$5x + 3y = 5(2) + 3(-1) = 10 - 7 = 3$

$3x - 2y = 3(2) - 2(-1) = 6 + 2 = 8$

* Conclusion : **le système admet le couple (2 ; – 1) comme solution.**

2- Méthode de substitution

Le principe consiste à exprimer une des inconnues en fonction de l'autre dans une des équations puis à remplacer cette inconnue par son expression dans la seconde équation : on obtient alors une équation à une seule inconnue.

Soit à résoudre le système d'inconnues x et y suivant : $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$

On exprime y en fonction de x dans la première égalité : $y = 10 - 3x$

On remplace y par son expression dans la seconde égalité :

$2x - 5(10 - 3x) = 1$

$2x - 50 + 15x = 1$

$17x = 51$

$x = 3$

On remplace x par sa valeur dans l'expression de y : $y = 10 - 3(3) = 10 - 9 = 1$

La vérification et la conclusion se rédigent de même que pour la méthode de combinaison.

Remarque : cette méthode est très intéressante lorsque le coefficient d'une inconnue est égal à 1 ou – 1.

3- Interprétation géométrique

Propriété (admise)

Chacune des équations d'un système de deux équations à deux inconnues est l'équation d'une droite.
Autrement dit, chacune de ces équations représente l'expression d'une fonction affine.
En conséquence, la solution du système est le couple de coordonnées du point d'intersection des deux droites.

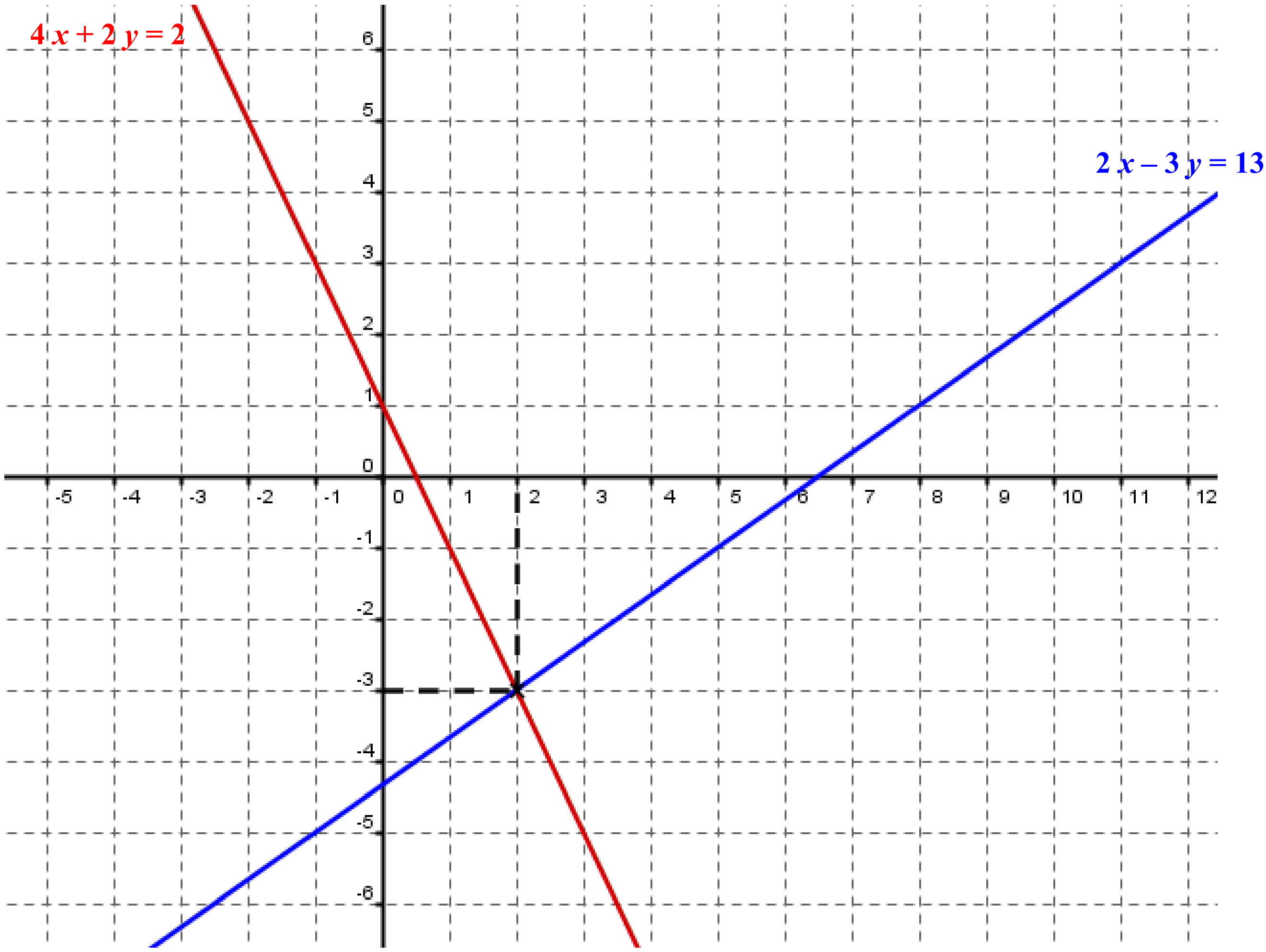
Exemple

Soit le système d'inconnues x et y suivant : $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$

On exprime y en fonction de x dans les deux égalités.

* $4x + 2y = 2$ $2y = 2 - 4x$ $y = ½(2 - 4x)$ $y = 1 - 2x$ $y = -2x + 1$ On reconnaît l'expression d'une fonction affine de coefficient – 2 et d'ordonnée à l'origine 1.	* $2x - 3y = 13$ $-3y = 13 - 2x$ $y = -1/3(13 - 2x)$ $y = -13/3 + 2/3\,x$ $y = 2/3\,x - 13/3$ On reconnaît l'expression d'une fonction affine de coefficient 2/3 et d'ordonnée à l'origine – 13/3.

On représente ces deux fonctions dans un repère.



La solution du système est le couple (2 ; – 3).

<u>Remarque</u>

Pour obtenir les représentations graphiques avec Geogebra, il suffit de saisir directement les équations du système.