Chapitre 8 – Relations trigonométriques dans le triangle rectangle

On considère un triangle ABC rectangle en C.

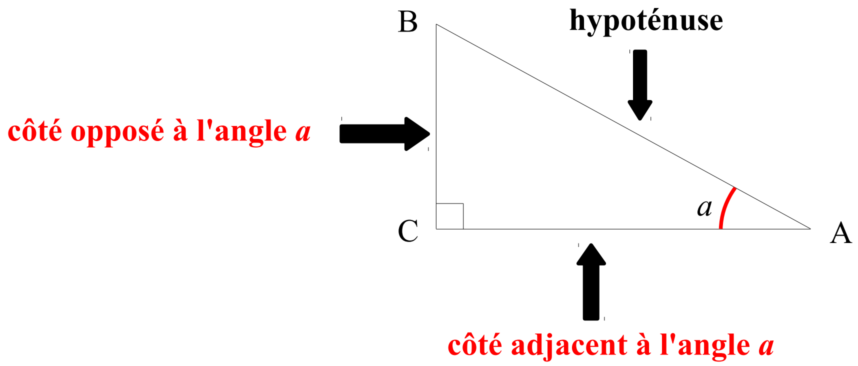
On appelle a et b les mesures respectives des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$.

Rappel : les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ sont **complémentaires** (la somme de leurs mesures égale 90°).

1- Vocabulaire

Le côté [AC] du triangle ABC est appelé côté **adjacent** à l'angle $\widehat{BAC}$.

Le côté [BC] du triangle ABC est appelé côté **opposé** à l'angle $\widehat{BAC}$.



Remarque

* le côté opposé à $\widehat{ABC}$ est le côté adjacent à $\widehat{BAC}$;

* le côté adjacent à $\widehat{ABC}$ est le côté opposé à $\widehat{BAC}$.

2- Définitions

Dans un triangle rectangle, on appelle **cosinus** d'un angle **aigu** le rapport du côté adjacent à l'angle et de l'hypoténuse.

Exemple et notation : $\cos a = \dfrac{AC}{AB}$.

Dans un triangle rectangle, on appelle **sinus** d'un angle **aigu** le rapport du côté opposé à l'angle et de l'hypoténuse.

Exemple et notation : $\sin a = \dfrac{BC}{AB}$.

Dans un triangle rectangle, on appelle **tangente** d'un angle **aigu** le rapport du côté opposé à l'angle et du côté adjacent à l'angle.

Exemple et notation : $\tan a = \dfrac{BC}{AC}$.

c) Calcul d'un angle : méthode et rédaction

On considère un triangle ABC rectangle en C tel que : AB = 11 cm ; BC = 4 cm .

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

On cherche la mesure de l'angle en A pour lequel on connaît la mesure du côté opposé [BC] et la longueur de l'hypoténuse [AB] : on peut donc utiliser le sinus de l'angle.

Dans le triangle ABC, rectangle en C, on a : $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{4}{11}$

Donc : $\widehat{BAC} = \arcsin\left(\dfrac{4}{11}\right)$ ***(étape facultative)***

En utilisant la calculatrice, on obtient : $\widehat{BAC} \approx 21°$

d) Calcul d'une longueur : méthode et rédaction

* 1er exemple

On considère un triangle KLM rectangle en M tel que : KL = 9 cm ; $\widehat{KLM} = 40°$.

Calculer la longueur LM.

On connaît la mesure de l'angle en L et la longueur de l'hypoténuse [KL] et on cherche la longueur de [LM], côté adjacent à cet angle : on peut donc utiliser le cosinus de l'angle.

Dans le triangle KLM, rectangle en M, on a : $\cos \widehat{KLM} = \dfrac{LM}{LK}$

Donc : $LM = LK \times \cos \widehat{KLM} = 9 \times \cos 40°$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $LM \approx 6{,}9$ cm .

* 2ème exemple

On considère un triangle RST rectangle en S tel que : ST = 12 cm ; $\widehat{TRS} = 65°$.

Calculer la longueur RS.

On connaît la mesure de l'angle en R et la longueur de [ST], côté opposé à cet angle et on cherche la mesure de [RS], côté adjacent à cet angle : on peut donc utiliser la tangente de l'angle.

Dans le triangle RST, rectangle en S, on a : $\tan \widehat{TRS} = \dfrac{ST}{RS}$

Donc : $RS = \dfrac{ST}{\tan \widehat{TRS}} = \dfrac{12}{\tan 65°}$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $RS \approx 5{,}6$ cm .

e) Propriétés

* Valeurs limites du cosinus et du sinus

Pour tout angle a aigu : $\boxed{0 < \cos a < 1}$ et $\boxed{0 < \sin a < 1}$

Démonstration : évidente d'après la définition car l'hypoténuse est le plus grand côté du triangle.

* Angles complémentaires

Si a et b sont deux angles aigus complémentaires, alors : $\boxed{\cos a = \sin b}$ et $\boxed{\tan a \times \tan b = 1}$.

Démonstration 1 : évidente d'après la définition.

Démonstration 2 : $\tan a \times \tan b = \dfrac{BC}{AC} \times \dfrac{AC}{BC} = 1$ **CQFD !**

* Liens entre les relations trigonométriques

Pour tout angle a aigu : $\boxed{\cos^2 a + \sin^2 a = 1}$ et $\boxed{\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a}}$

Démonstration 1 :

Dans le triangle ABC rectangle en C, d'après la propriété de Pythagore : $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Donc : $\cos^2 a + \sin^2 a = \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\dfrac{BC}{AB}\right)^2 = \dfrac{AC^2 + BC^2}{AB^2} = \dfrac{AB^2}{AB^2} = 1$ **CQFD !**

Démonstration 2 :

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\dfrac{BC}{AB}}{\dfrac{AC}{AB}} = \frac{BC}{AB} \times \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC} = \tan a$$ **CQFD !**