Chapitre 7 – Angles et Trigonométrie

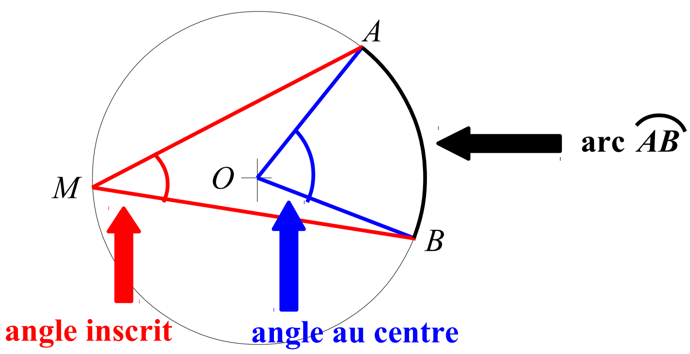
1- Angles inscrits et angles au centre

a) Vocabulaire

On considère un cercle (C) de centre O et trois points A, B, M sur ce cercle tels que : $M \notin \overset{\frown}{AB}$.

L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé l'**angle au centre** qui **intercepte** l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé l'**angle inscrit** qui **intercepte** l'arc $\overset{\frown}{AB}$.



b) Propriété

Si un angle inscrit intercepte le même arc qu'un angle au centre, alors il mesure la moitié de cet angle au centre.

Démonstration : admise.

c) Conséquence

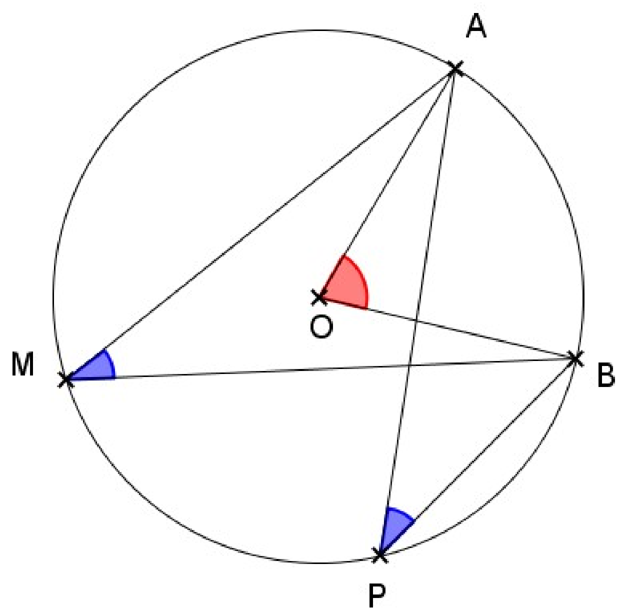
Si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils sont de même mesure.

Démonstration

Soit deux angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{APB}$.

D'après la propriété précédente, ils mesurent chacun la moitié de l'angle au centre $\widehat{AOB}$.

Donc ils ont la même mesure. **CQFD !**



2- Relations Trigonométriques dans le triangle rectangle

On considère un triangle ABC rectangle en C.

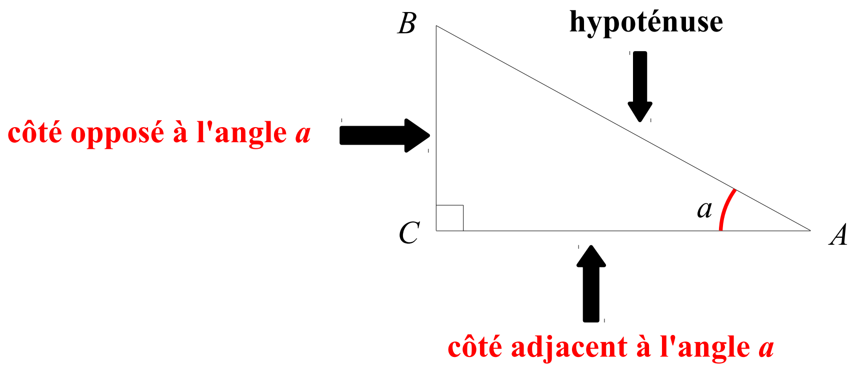
On appelle a et b les mesures respectives des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$.

Rappel : les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ sont **complémentaires** (la somme de leurs mesures égale 90°).

a) Vocabulaire

Le côté [AC] du triangle ABC est appelé côté **adjacent** à l'angle $\widehat{BAC}$.

Le côté [BC] du triangle ABC est appelé côté **opposé** à l'angle $\widehat{BAC}$.



Remarque

* le côté opposé à $\widehat{ABC}$ est le côté adjacent à $\widehat{BAC}$;

* le côté adjacent à $\widehat{ABC}$ est le côté opposé à $\widehat{BAC}$.

b) Définitions

Dans un triangle rectangle, on appelle **cosinus** d'un angle **aigu** le rapport du côté adjacent à l'angle et de l'hypoténuse.

Exemple et notation : $\cos a = \dfrac{AC}{AB}$.

Dans un triangle rectangle, on appelle **sinus** d'un angle **aigu** le rapport du côté opposé à l'angle et de l'hypoténuse.

Exemple et notation : $\sin a = \dfrac{BC}{AB}$.

Dans un triangle rectangle, on appelle **tangente** d'un angle **aigu** le rapport du côté opposé à l'angle et du côté adjacent à l'angle.

Exemple et notation : $\tan a = \dfrac{BC}{AC}$.

c) Calcul d'un angle : méthode et rédaction

On considère un triangle ABC rectangle en C tel que : $AB = 11$ cm ; $BC = 4$ cm .

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

On cherche la mesure de l'angle en *A* pour lequel on connaît la mesure du côté opposé [*BC*] et la longueur de l'hypoténuse [*AB*] : on peut donc utiliser le sinus de l'angle.

Dans le triangle ABC, rectangle en C, on a : $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{4}{11}$

Donc : $\widehat{BAC} = \arcsin\left(\dfrac{4}{11}\right)$ ***(étape facultative)***

En utilisant la calculatrice, on obtient : $\widehat{BAC} \approx 21\,°$

d) Calcul d'une longueur : méthode et rédaction

* 1er exemple

On considère un triangle KLM rectangle en M tel que : $KL = 9$ cm ; $\widehat{KLM} = 40\,°$.

Calculer la longueur LM.

On connaît la mesure de l'angle en *L* et la longueur de l'hypoténuse [*KL*] et on cherche la longueur de [*LM*], côté adjacent à cet angle : on peut donc utiliser le cosinus de l'angle.

Dans le triangle KLM, rectangle en M, on a : $\cos \widehat{KLM} = \dfrac{LM}{LK}$

Donc : $LM = LK \times \cos \widehat{KLM} = 9 \times \cos 40\,°$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $LM \approx 6{,}9$ cm .

* 2ème exemple

On considère un triangle RST rectangle en S tel que : $ST = 12$ cm ; $\widehat{TRS} = 65\,°$.

Calculer la longueur RS.

On connaît la mesure de l'angle en *R* et la longueur de [*ST*], côté opposé à cet angle et on cherche la mesure de [*RS*], côté adjacent à cet angle : on peut donc utiliser la tangente de l'angle.

Dans le triangle RST, rectangle en S, on a : $\tan \widehat{TRS} = \dfrac{ST}{RS}$

Donc : $RS = \dfrac{ST}{\tan \widehat{TRS}} = \dfrac{12}{\tan 65\,°}$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $RS \approx 5{,}6$ cm .

e) Propriétés

* Valeurs limites du cosinus et du sinus

Pour tout angle a aigu : $\boxed{0 < \cos a < 1}$ et $\boxed{0 < \sin a < 1}$

Démonstration : évidente d'après la définition car l'hypoténuse est le plus grand côté du triangle.

* Liens entre les relations trigonométriques

Pour tout angle a aigu : $\boxed{\cos^2 a + \sin^2 a = 1}$ et $\boxed{\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a}}$

Démonstration 1 :

Dans le triangle ABC rectangle en C, d'après la propriété de Pythagore : $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Donc : $\cos^2 a + \sin^2 a = \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\dfrac{BC}{AB}\right)^2 = \dfrac{AC^2 + BC^2}{AB^2} = \dfrac{AB^2}{AB^2} = 1$ **CQFD !**

Démonstration 2 :

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\dfrac{BC}{AB}}{\dfrac{AC}{AB}} = \frac{BC}{AB} \times \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC} = \tan a$$ **CQFD !**