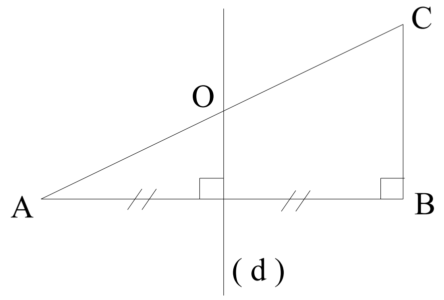
Chapitre 8 – Cercles et perpendiculaires

1- Cercle circonscrit à un triangle rectangle

a) Propriété

Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de son hypoténuse.

Démonstration



Soit ABC un triangle rectangle en B.

Considérons la droite (d), médiatrice de [AB].

On appelle O le point d'intersection de (d) et [AC].

Comme (d) et (BC) sont perpendiculaires à (AB) : (d) // (BC).

Dans le triangle ABC, (d) est donc parallèle à un côté et coupe un deuxième côté en son milieu.

D'après la propriété de la droite des milieux, elle coupe le troisième côté en son milieu, donc **O est le milieu de [AC]** et : OA = OC.

Or O est sur la médiatrice de [AB] donc O est équidistant de A et de B.

En définitive : OA = OB = OC .

Donc **O est le centre du cercle circonscrit à ABC**. **CQFD !**

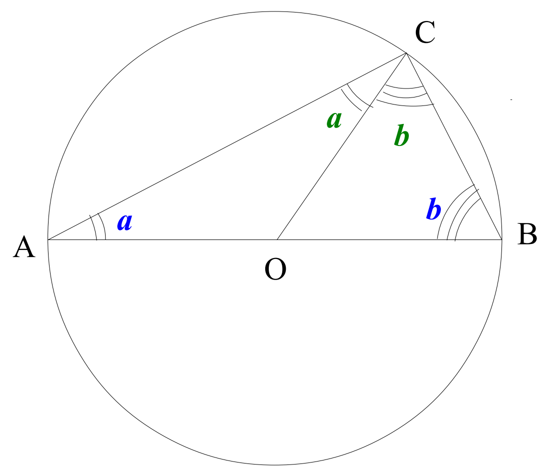
b) Propriété réciproque

Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors il est rectangle et il admet ce côté comme hypoténuse.

Démonstration

Soit un cercle de centre O et de diamètre [AB] et soit un point C du cercle, distinct de A et de B.

On note : $\widehat{CAB} = a$ et $\widehat{CBA} = b$



Le triangle AOC est isocèle en O donc : $\widehat{OCA} = \widehat{OAC} = a$.

Le triangle BOC est isocèle en O donc : $\widehat{OCB} = \widehat{OBC} = b$.

La somme des trois angles du triangle ABC égale 180°.

Donc : $a + b + (a + b) = 180°$.

D'où : $2\,a + 2\,b = 180°$.

Par conséquent : $2\,(a + b) = 180°$.

Et par suite : $a + b = 90°$.

Or : $\widehat{ACB} = a + b$. En définitive : $\widehat{ACB} = 90°$. **CQFD !**

2- Distance d'un point à une droite

a) Définition

On considère une droite (d) et un point A.

On appelle **distance du point** A **à la droite** (d) la plus courte distance entre A et un point de (d).

b) Propriété

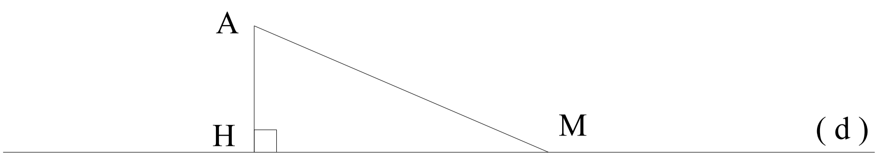
La distance de A à (d) est la longueur AH, où H est le pied de la perpendiculaire à (d) passant par A.

Démonstration

* 1[er] cas : si A appartient à (d), la distance de A à (d) est nulle et la propriété est évidente.

* 2[ème] cas : supposons que A n'appartient pas à (d).

Soit H le pied de la perpendiculaire à (d) passant par A et M un autre point de (d).



Le triangle AHM est rectangle en H.

Or, dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté.

Par conséquent : AH < AM **CQFD !**

3- Droite tangente à un cercle

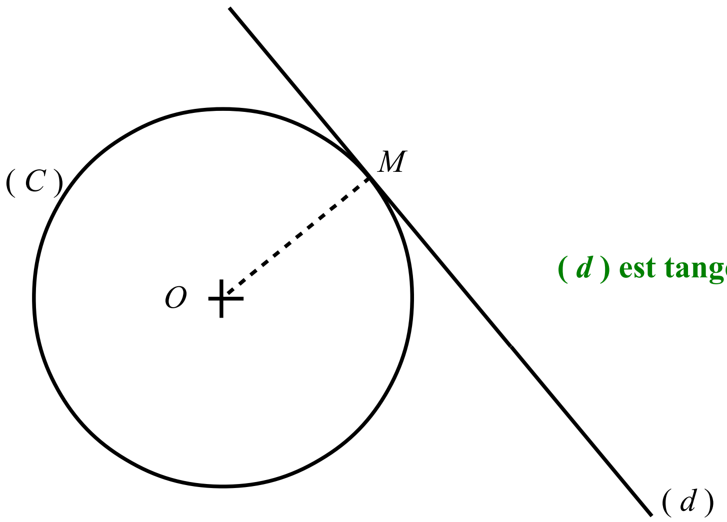
a) Définition

On considère un cercle (C) de centre O.

On appelle **tangente au cercle** (C) toute droite qui n'a qu'un seul point d'intersection avec ce cercle.

Ce point d'intersection est alors appelé le **point de tangence** ou **point de contact** entre la droite et le cercle.

Exemple



(d) est tangente à (C) en M

b) Propriété caractéristique

Soit un cercle (C) de centre O, un point M sur (C) et une droite (d).

* Si (d) est tangente au cercle (C) en M, alors (OM) est perpendiculaire à (d).

* Réciproquement, si (OM) est perpendiculaire à (d), alors (d) est tangente au cercle (C) en M.

Démonstration : admise.

4- Cercle inscrit dans un triangle

a) Propriété caractéristique de la bissectrice

* Si un point est sur la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de cet angle.

* Réciproquement, si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il est sur la bissectrice de cet angle.

Démonstration : admise.

b) Propriété des bissectrices d'un triangle

Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.

Leur point de concours est le centre du **cercle inscrit** dans le triangle, c'est-à-dire du cercle qui est tangent aux trois côtés du triangle.

Démonstration : admise.