Chapitre 10 – Distance d'un point à une droite – Tangente à un cercle

1- Distance d'un point à une droite

a) Définition

On considère une droite (d) et un point A.

On appelle **distance du point A à la droite** (d) la plus courte distance entre A et un point de (d).

b) Propriété

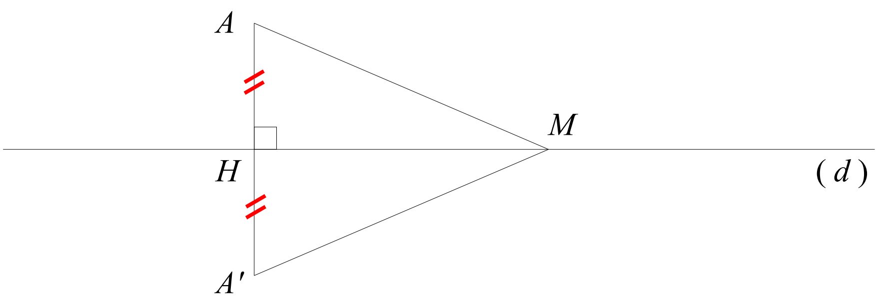
La distance de A à (d) est la longueur AH, où H est le pied de la perpendiculaire à (d) passant par A.

Démonstration

* 1er cas : si A appartient à (d), la distance de A à (d) est nulle et la propriété est évidente.

* 2ème cas : supposons que A n'appartient pas à (d).

Soit M un point de (d) et A' le symétrique de A par rapport à (d).



Le point M est donc sur la médiatrice de [AA'] donc : $AM = MA'$.

D'après l'inégalité triangulaire : $AA' \leq AM + MA' = 2\ AM$

Or, H est le milieu de [AA'] et donc : $AA' = 2\ AH$.

Par conséquent : $2\ AH \leq 2\ AM$

Et donc : $AH \leq AM$ **CQFD !**

Remarque : c'est ce même raisonnement qui a permis de démontrer que, dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté.

2- Droite tangente à un cercle

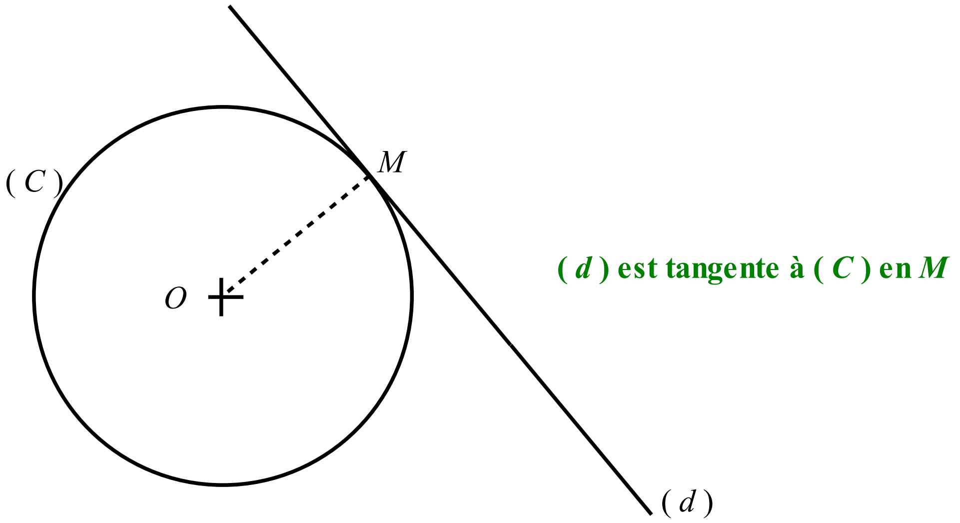
a) Définition

On considère un cercle (C) de centre O.

On appelle **tangente au cercle** (C) toute droite qui n'a qu'un seul point d'intersection avec ce cercle.

Ce point d'intersection est alors appelé le **point de tangence** ou **point de contact** entre la droite et le cercle.

Exemple



b) Propriété caractéristique

Soit un cercle (C) de centre O, un point M sur (C) et une droite (d).

* Si (d) est tangente au cercle (C) en M, alors (OM) est perpendiculaire à (d).

* Réciproquement, si (OM) est perpendiculaire à (d), alors (d) est tangente au cercle (C) en M.

Démonstration

* Soit (d), tangente au cercle (C) en M et soit un point N sur (d) distinct de M.
  Il apparaît évident que la droite (d) est extérieure au cercle.
  Donc la distance ON est strictement supérieure au rayon du cercle, ici OM.
  En conséquence, pour tout point N de (d) : $OM \leq ON$.
  La distance OM est donc la distance du point O à la droite (d).
  Et donc : M est le pied de la perpendiculaire à (d) passant par O.
  D'où : $(OM) \perp (d)$. **CQFD !**

* Réciproquement, soit une droite (d) passant par M telle que : $(OM) \perp (d)$.
  La distance OM représente alors la distance du point O à la droite (d).
  Donc, pour tout point N de (d), distinct de M : $OM < ON$.
  Or, N est sur le cercle si sa distance à O est égale au rayon, soit OM.
  On en déduit que le seul point de (d) qui est sur le cercle est M.
  Et donc, (d) est tangente au cercle en M. **CQFD !**

3- Cercle inscrit dans un triangle

a) Propriété caractéristique de la bissectrice

* Si un point est sur la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de cet angle.

* Réciproquement, si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il est sur la bissectrice de cet angle.

Démonstration : admise.

b) Propriété des bissectrices d'un triangle

Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.

Leur point de concours est le centre du **cercle inscrit** dans le triangle, c'est-à-dire du cercle qui est tangent aux trois côtés du triangle.

Démonstration : admise.