Chapitre 9 - Équations du second degré

L'objectif de ce chapitre est de résoudre certaines équations à une inconnue du second degré.

1- Équations « produit nul »

a) Vocabulaire

Soit deux expressions $A(x)$ et $B(x)$ de la variable x.

Toute équation de la forme $A(x) \times B(x) = 0$ est appelée **équation « produit nul »**.

b) Propriété

Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit qu'un de ses facteurs soit nul.

Autrement dit

Soit a et b deux nombres.

* Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $a \times b = 0$.

* Réciproquement, si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Démonstration

* La première partie de la propriété est évidente.

* Si $a \times b = 0$, on envisage deux cas.

Premier cas : supposons que a est nul. La propriété est alors démontrée.

Second cas : supposons que a est non nul. On peut alors multiplier chacun des membres de l'égalité par l'inverse de a : $\dfrac{a \times b}{a} = \dfrac{0}{a}$. En simplifiant, on obtient : $b = 0$. **CQFD !**

c) Principe et méthode générale

On considère une équation du second degré.

* Si ce n'est pas le cas, on transpose pour que le second membre de cette équation soit nul.

* On factorise alors, si possible, le premier membre : on obtient ainsi une équation « produit nul ».

* On utilise la précédente propriété : on doit alors résoudre deux équations du premier degré.

d) Application

Résoudre l'équation : $(3x - 2)(2x + 3) = 0$. **On reconnaît ici une équation « produit nul ».**

Or, si un produit est nul, alors un au moins de ses facteurs est nul (et réciproquement).

Donc : $3x - 2 = 0$ ou $2x + 3 = 0$

Soit : $x = \dfrac{2}{3}$ ou $x = -\dfrac{3}{2}$

Par conséquent, l'équation admet deux solutions : $-\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{2}{3}$.

2- Égalité de deux carrés

a) Propriété

Soit un nombre a.

$\boxed{\text{L'équation } x^2 = a^2 \text{ admet deux solutions : } a \text{ et } -a\,.}$

Démonstration

$x^2 = a^2$ donc $x^2 - a^2 = 0$.

On reconnaît une identité remarquable et on peut donc factoriser le premier membre : $(x - a)(x + a) = 0$

On reconnaît alors une équation « produit nul ».

Or, si un produit est nul, alors un au moins de ses facteurs est nul (et réciproquement).

Donc : $x - a = 0$ ou $x + a = 0$

Soit : $x = a$ ou $x = -a$ **CQFD !**

b) Application

Résoudre l'équation : $(3x + 1)^2 = 16$

On a ici : $(3x + 1)^2 = 4^2$

On en déduit que : $3x + 1 = 4$ ou $3x + 1 = -4$

$3x = 3$ ou $3x = -5$

$x = 1$ ou $x = -\dfrac{5}{3}$

Donc l'équation admet deux solutions : $-\dfrac{5}{3}$ et 1 .