Chapitre 5 - Probabilités

1- Vocabulaire

Un peu d'étymologie avant de commencer.

- le mot **aléatoire** vient du latin ***alea*** qui signifie « jeu de dés ».
- le mot **hasard** vient de l'arabe ***al-zahr,*** « le dé à jouer ».

* Une expérience est dite **aléatoire** lorsque chaque issue ne dépend pas des issues des expériences précédentes.
On ne peut pas prévoir le résultat obtenu et seul le hasard entre en jeu.
Exemple : lancer une pièce ou un dé, tirer une carte dans un paquet sont des expériences aléatoires.

* Chacun des résultats possibles d'une expérience est une **issue** de l'expérience.

<u>Exemples</u> – Si on regarde la face supérieure du lancer d'une pièce, il y a deux issues : « pile » et « face ».
Si on regarde la face supérieure du lancer d'un dé classique, il y a six issues : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

* L'ensemble des issues d'une expérience forme l'**univers** de cette expérience.

* Un **événement** est une condition qui peut être, ou ne pas être, réalisée lors d'une expérience.
Un événement peut être réalisé par une ou plusieurs issues de cette expérience.
Un événement réalisé par une seule issue est un **événement élémentaire**.

<u>Exemples</u> - Lors du lancer d'une pièce de monnaie, « obtenir pile » est un événement élémentaire.
Lors du lancer d'un dé, « obtenir un nombre impair » est un événement.
Il est réalisé par les issues 1, 3 et 5. Ce n'est donc pas un événement élémentaire.

* Un événement qui ne peut pas se produire est un **événement impossible**.

<u>Exemple</u> : « Obtenir 7 » en lançant un dé classique à six faces est un événement impossible.

* Un événement qui se réalise à chaque expérience est un **événement certain**.

<u>Exemple</u> : « Obtenir un nombre inférieur à 10 » en lançant un dé classique à six faces est un événement certain.

2- Simulation du hasard

Des fonctions du tableur ou de la calculatrice permettent d'obtenir des nombres de manière **pseudo-aléatoire**.

	Tableur	Casio	TI Menu Math PRB
Générer « au hasard » un nombre **décimal** compris entre 0 et 1	**= ALEA( )**	**Ran#**	**Rand**
Générer « au hasard » un nombre **entier** compris entre deux entiers choisis	**= ALEA.ENTRE.BORNES (*entier 1* ; *entier 2*)**	**Ranint (...;...)**	**Randn(...;...)**

Elles permettent alors de **simuler** des expériences aléatoires.

3-Notion de probabilité

a) Définition

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée **probabilité**.

Exemples

* Si on lance un très grand nombre de fois une pièce de monnaie, on obtient pile environ une fois sur deux. La probabilité de l'événement « obtenir pile » est donc 1/2.
* Si on lance un très grand nombre de fois un dé à six faces, on obtient 2 environ une fois sur six. La probabilité de l'événement « obtenir 2 » est donc 1/6.

b) Notation

La probabilité d'obtenir un événement A est notée p(A).

c) Propriétés

* Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.
* La probabilité d'un événement impossible est égale à 0.
* La probabilité d'un événement certain est égale à 1.
* La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.

d) Équiprobabilité

* Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience ont la même probabilité d'être réalisés, on dit qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.
* Si n désigne le nombre d'issues équiprobables d'une expérience aléatoire, la probabilité d 'un événement élémentaire est égale à $\dfrac{1}{n}$.
* Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d 'un événement A est égale au quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles.

e) Événements contraires

* Si A désigne un événement, on appelle « non A » ou $\overline{A}$ (on lit « A barre ») l'événement contraire de A, c'est-à-dire l'événement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.
* Propriété

Pour tout événement A : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

g) Expérience aléatoire à deux épreuves

* On appelle expérience aléatoire à deux épreuves une expérience composée de deux expériences faites successivement.

Exemple

On dispose de deux urnes, numérotées 1 et 2 contenant des boules de couleur.

Dans l'urne 1, il y a trois boules bleues (B_1, B_2, B_3) et une rouge (R).

Dans l'urne 2, il y a quatre boules jaunes (J_1, J_2, J_3, J_4), trois vertes (V_1, V_2, V_3) et deux noires (N_1, N_2).

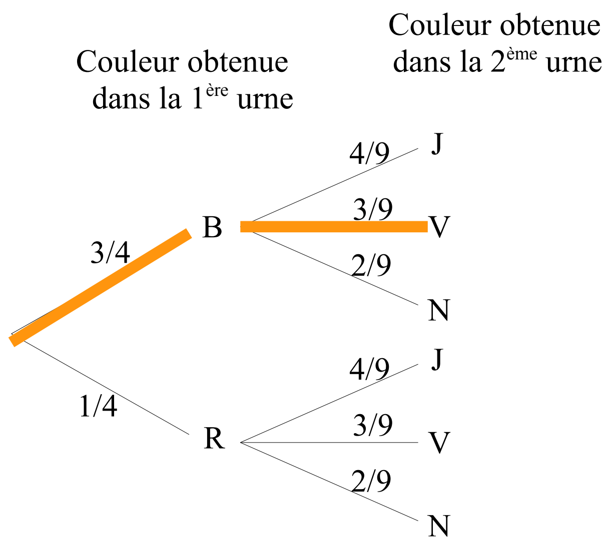
Dans les deux urnes, toutes les boules sont indiscernables, d'où une situation d'équiprobabilité.

Dans un premier temps, on tire une boule dans l'urne 1 et on note sa couleur.

Puis on tire une boule dans l'urne 2 et on note sa couleur.

Les issues possibles sont (B_1;V_1), (B_1;V_2), …, (B_2;V_1), …, (R;N_2), soit 36 issues en tout.

Pour étudier cette expérience aléatoire, on va résumer ces issues à l'aide d'un **arbre de probabilités**.



Sur chaque branche de l'arbre, on indique la probabilité correspondante.

Propriété (admise)

> Dans un arbre de probabilités, la probabilité d'une issue à laquelle conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

Dans le précédent exemple, si on cherche la probabilité d' obtenir une boule bleue puis une boule verte, on parcourt l'arbre comme indiqué ci-dessus. La probabilité est alors : $\frac{3}{4} \times \frac{3}{9} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.