Chapitre 2 – Proportionnalité dans le triangle

1- Triangles semblables

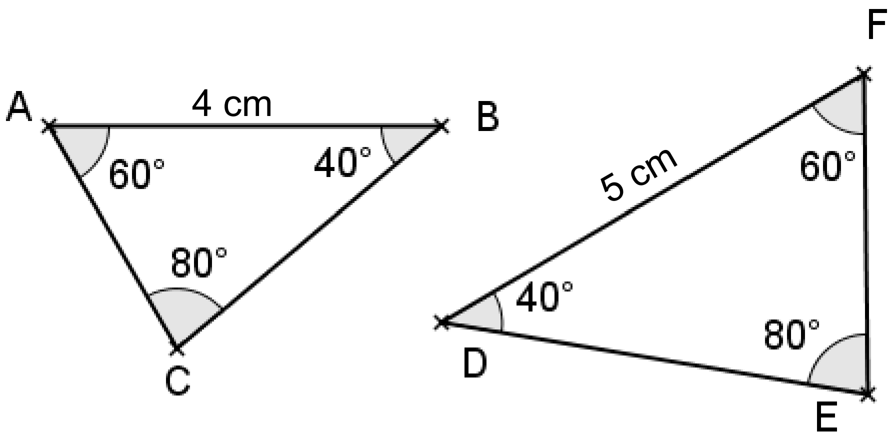
a) Définitions

* Deux triangles **semblables** sont deux triangles qui ont les mêmes mesures d'angle.

* Les côtés opposés aux angles de même mesure de deux triangles semblables sont dit **homologues**.

* Deux triangles qui ont des côtés de mêmes longueurs sont **isométriques** ou **égaux**.

Exemple



Les triangles ABC et DEF sont semblables.

Les côtés [AB] et [DF] sont homologues, tout comme [AC] et [EF] ou [BC] et [DE].

Remarque

Des triangles isométriques sont semblables.

b) Propriétés (admises)

* Si deux triangles semblables ont deux côtés homologues de même mesure, alors ils sont isométriques.

* Si deux triangles sont semblables, alors leurs côtés homologues sont proportionnels.

* Réciproquement, si deux triangles ont des côtés proportionnels, alors ils sont semblables.

Exemple

Pour les triangles ABC et DEF précédents : $\frac{AB}{DF} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{DE}$.

2- Agrandissement-Réduction

Soit deux triangles semblables et k le quotient des côtés homologues du premier et du second triangle.

Si $k < 1$, alors le second triangle est une **réduction** du premier.

Si $k > 1$, alors le second triangle est un **agrandissement** du premier.

Si $k = 1$, alors les triangles sont isométriques.

Exemple

Pour les triangles ABC et DEF précédents :

* DEF est un agrandissement de ABC de coefficient $k = \dfrac{DF}{AB} = \dfrac{5\,\text{cm}}{4\,\text{cm}} = \dfrac{5}{4}$

* ABC est une réduction de DEF de coefficient $k' = \dfrac{AB}{DF} = \dfrac{4\,\text{cm}}{5\,\text{cm}} = \dfrac{4}{5}$

Remarque : les coefficients k et k' sont inverses.

3- Théorème de Thalès

a) Propriété directe

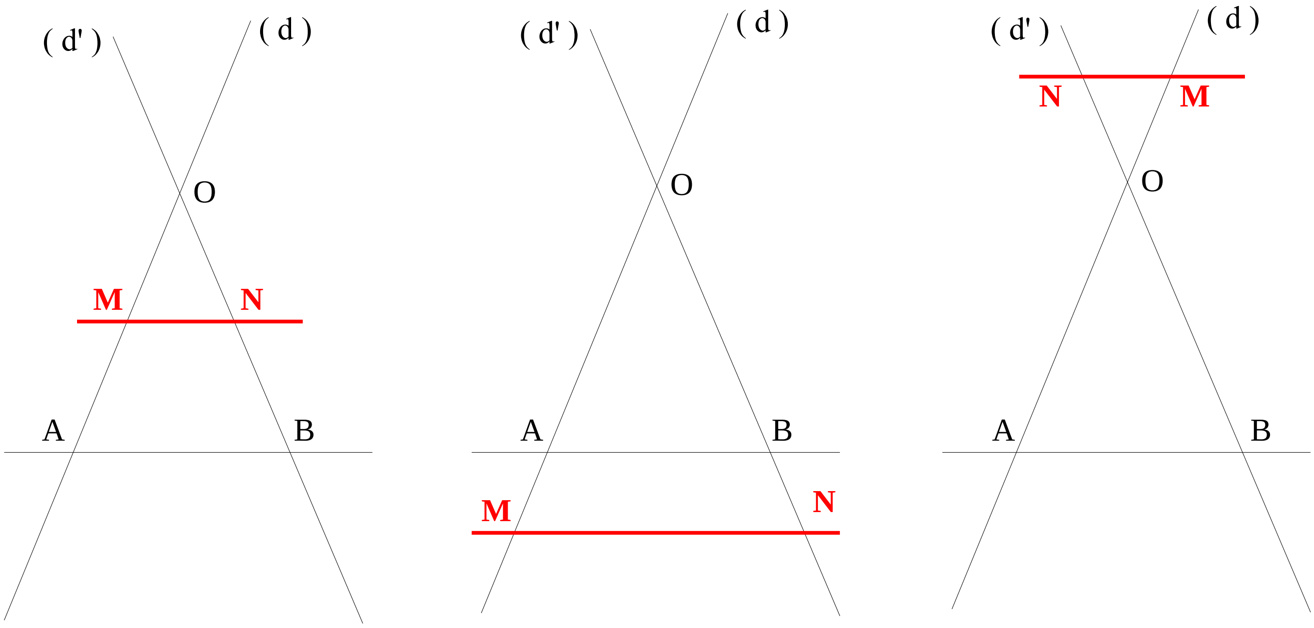
On considère deux droites (d) et (d') sécantes en O.

Soit deux points A et M sur (d) et deux points B et N sur (d') tous distincts de O.

Si (MN) // (AB) alors : $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{ON}{OB}$

Autrement dit : deux droites parallèles découpent deux droites sécantes dans des dimensions proportionnelles.

Remarque : on peut appliquer ce théorème dans les trois configurations ci-dessous.



Démonstration

* Pour les deux premieres situations précédentes, on a :

- les angles $\widehat{MON}$ et $\widehat{AOB}$ sont confondus donc leurs mesures sont égales ;

- les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OMN}$ sont correspondants et s'appuyent sur des droites parallèles : ils ont donc la même mesure ;

- il en est de même des angles $\widehat{OBA}$ et $\widehat{ONM}$.

* Pour la dernière situation, on a :

- les angles $\widehat{MON}$ et $\widehat{AOB}$ sont opposés par le sommet donc leurs mesures sont égales ;

- les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OMN}$ sont alternes-internes et s'appuyent sur des droites parallèles : ils ont donc la même mesure ;

- il en est de même des angles $\widehat{OBA}$ et $\widehat{ONM}$.

* Dans tous les cas, les triangles OAB et OMN, ayant leurs angles de même mesure, sont semblables.

Leurs côtés ont donc des dimensions proportionnelles et, en particulier : $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB}$. **CQFD !**

b) Conséquence

Avec les conditions précédentes, comme les dimensions du triangle OMN sont proportionnelles à celles du triangle OAB : si (MN) // (AB) alors : $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} = \frac{MN}{AB}$ ♥

Remarque

Si deux des rapports $\frac{OM}{OA}$, $\frac{ON}{OB}$, $\frac{MN}{AB}$ sont différents alors (MN) et (AB) ne sont pas parallèles.

En effet, si ces droites étaient parallèles, d'après la propriété de Thalès, les rapports seraient égaux.

c) Propriété réciproque

On considère un triangle OAB.

Soit deux points M et N tels que O, M, A soient alignés dans le **même ordre** que O, N, B.

Si $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB}$ alors : (MN) // (AB). ♥

Démonstration

On considère un triangle OAB. Soit deux points M et N tels que :

O, M, A sont alignés dans le même ordre que O, N, B et $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{ON}{OB}$

On va démontrer la propriété dans le cas où les points M et N sont sur [OA] et [OB] respectivement.

Elle se démontre de manière analogue dans les autres cas.

Considérons la parallèle à (AB) passant par M : elle coupe [OB] en P.

D'après la proprété de Thalès : $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{OP}{OB}$. On en déduit donc que : $\dfrac{ON}{OB} = \dfrac{OP}{OB}$ puis que : ON = OP.

Les points P et N sont donc tous les deux sur un même cercle de centre O.

Mais ils sont tous deux également sur le segment [OB].

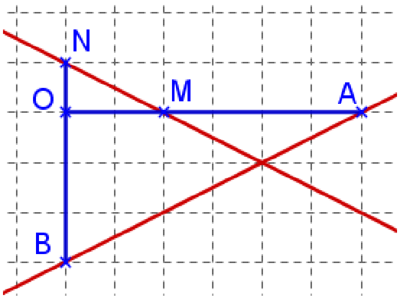
Or, ce cercle et ce segment ne peuvent avoir qu'un point en commun.

On en déduit que N et P sont confondus donc que N est sur la parallèle à (AB) passant par M et enfin que (AB) et (MN) sont parallèles.

Remarques

* La propriété réciproque de Thalès permet de démontrer que des droites sont parallèles ;
  elle ne permet en aucun cas de démontrer que des droites ne sont pas parallèles !

* La condition d'ordre dans l'alignement est indispensable comme le montre l'exemple ci-dessous.
  OAB est un triangle et les points O, M, A sont alignés, de même que les points O, N, B.



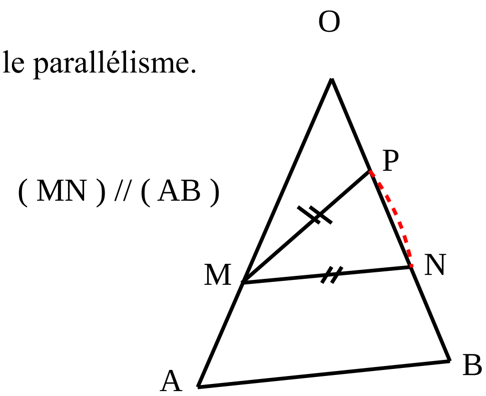
D'une part : $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

D'autre part : $\dfrac{ON}{OB} = \dfrac{1}{3}$

On a donc bien : $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{ON}{OB}$

Pourtant (MN) et (AB) ne sont pas parallèles

* Le troisième rapport (issu de la conséquence) ne permet pas d'établir le parallélisme.
  En effet pour la configuration ci-contre, on a : $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{MN}{AB}$.
  Mais on a donc aussi : $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{MP}{AB}$ car MP = MN.
  Pourtant, les droites (MP) et (AB) ne sont pas parallèles.



4- Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les grandeurs géométriques

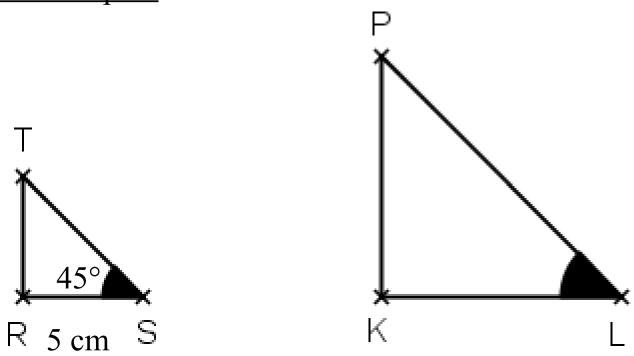
Propriété (admise)

Dans un agrandissement ou une réduction de coefficient k :

* les mesures d'angle sont inchangées ;
* les longueurs sont multipliées par k ;
* les aires sont multipliées par k^2 ;
* les volumes sont multipliés par k^3.

Exemples

1- Dans le plan



Aire(RST) = 12,5 cm²

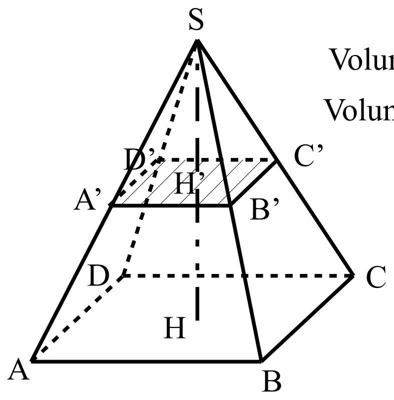
KLP est un agrandissement de RST de rapport $k = 2$.

* $\widehat{PLK} = \widehat{TSR} = 45°$.
* $KL = k \times RS = 2 \times 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$
* $\text{Aire(KLP)} = k^2 \times \text{Aire(RST)} = 2^2 \times 12{,}5 \text{ cm}^2 = 50 \text{ cm}^2$

2- Extension dans l'espace (en 3D)

Si on coupe une pyramide SABCD par un plan parallèle à sa base, on obtient une pyramide **réduite** SA'B'C'D'. Soit k le coefficient de réduction.

$$k = \frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SH'}{SH}$$



Volume(SABCD) = V

Volume(SA'B'C'D') = V'

Si $V = 40$ cm³ et si $k = 0{,}5$:

$V' = k^3 \times V = (0{,}5)^3 \times 40 \text{ cm}^3 = 5 \text{ cm}^3$