

Chapitre 6 – Fonctions linéaires et affines

1 – Fonctions linéaires

a) Définition

On appelle **fonction linéaire** toute fonction f dont l'expression peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax$ où a est une constante.

Ce nombre a est alors appelé **coefficient** de linéarité de la fonction linéaire f .

Remarque : lien avec la proportionnalité

* On considère deux grandeurs x et y telles que : y soit proportionnelle à x .

En conséquence, il existe un nombre a tel que : $y = ax$.

La fonction qui, à la grandeur x , associe la grandeur y est donc linéaire.

* Réciproquement, toute fonction linéaire représente une situation de proportionnalité.

b) Représentation graphique

On considère un repère du plan.

* Si une fonction est linéaire, alors sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine.



* Réciproquement, si la représentation graphique d'une fonction est une droite qui passe par l'origine du repère, alors cette fonction est linéaire.

Démonstrations : admises.

Vocabulaire : le coefficient de la fonction linéaire est appelé **coefficient directeur** ou **pente** de la droite.

c) Propriétés

Soit f une fonction linéaire de coefficient a .

* L'image de 0 par une fonction linéaire est 0, soit : $f(0) = 0$.

Démonstration : évidente en calculant l'image de 0.

* Le coefficient d'une fonction linéaire est l'image de 1 par cette fonction, soit : $a = f(1)$.

Démonstration : évidente en calculant l'image de 1.

* Pour tout nombre x non nul : $a = \frac{f(x)}{x}$.

Démonstration : évidente d'après la définition.

d) Étude d'une fonction linéaire

* 1^{er} cas : on connaît l'expression

Soit la fonction f définie pour tout nombre x par : $f(x) = \frac{2}{3}x$.

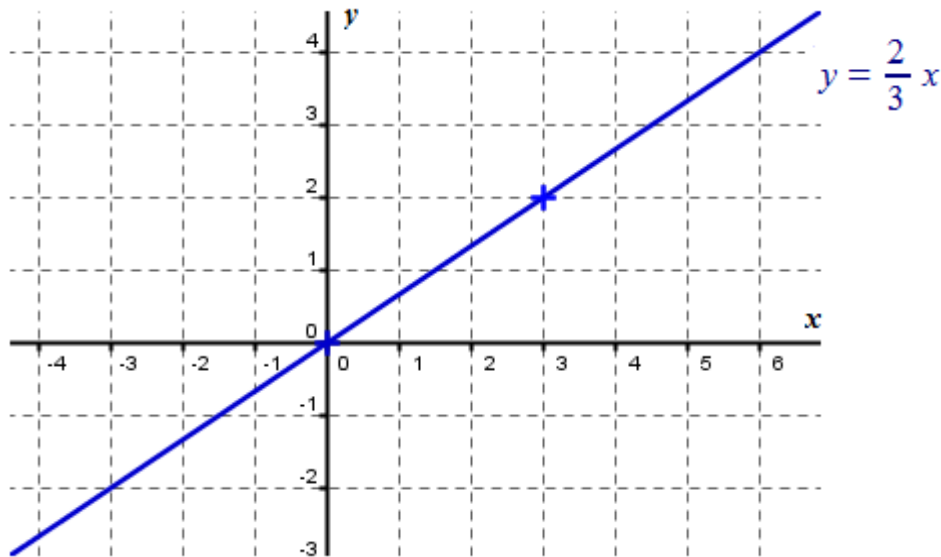
Étude de f

$f(x) = \frac{2}{3}x$. On reconnaît une expression de la forme $f(x) = ax$ avec : $a = \frac{2}{3}$ donc f est linéaire.

Par conséquent sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine.

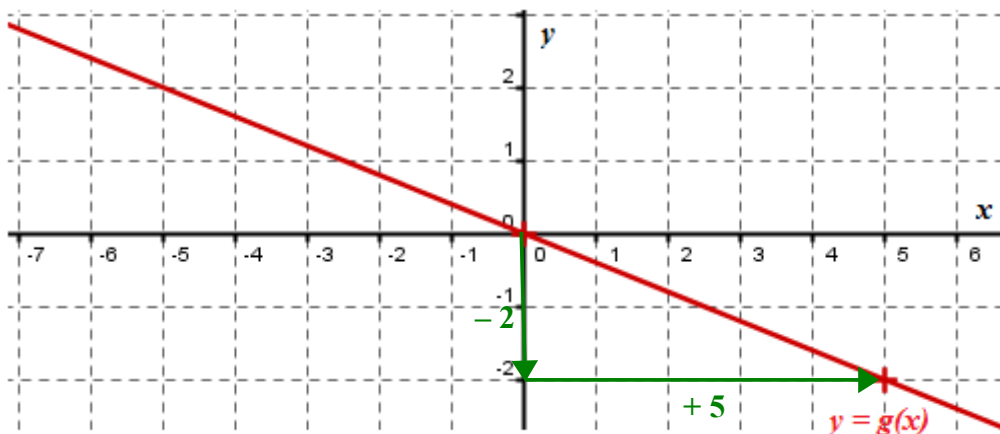
Par ailleurs : $f(3) = 2$. Donc la droite passe par le point de coordonnées $(3; 2)$.

Représentation graphique



* 2^{ème} cas : on connaît un nombre et son image

Soit la fonction g définie par sa représentation graphique.



Étude de g

La représentation graphique de g est une droite qui passe par l'origine.

Donc g est une fonction linéaire et son expression est de la forme $g(x) = kx$.

D'autre part, la droite passe par le point de coordonnées $(5; -2)$; par conséquent : $g(5) = -2$.

Or, pour tout nombre x non nul : $k = \frac{g(x)}{x}$. Donc, pour $x = 5$: $k = \frac{g(5)}{5} = \frac{-2}{5}$

Conclusion : pour tout nombre x , $g(x) = -\frac{2}{5}x$. *On peut retrouver graphiquement le coefficient.*

2 – Fonctions affines

a) Définition

On appelle **fonction affine** toute fonction f dont l'expression peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$ où a et b sont des constantes.

Ce nombre a est appelé **coefficient** de la fonction affine f .

Ce nombre b est appelé **ordonnée à l'origine** de la fonction affine f .

Remarques

* Si $b = 0$, l'expression devient $f(x) = ax$. On retrouve alors une fonction linéaire.

Donc : toute fonction linéaire est aussi une fonction affine.

* Si $a = 0$, l'expression devient : $f(x) = b$. On obtient alors une fonction **constante**.

Donc : toute fonction constante est aussi une fonction affine.

* Si $a = b = 0$, l'expression devient : $f(x) = 0$. On obtient alors la fonction **nulle**.

Et la fonction nulle est linéaire, constante et donc affine.

b) Représentation graphique

On considère un repère du plan.

* Si une fonction est affine, alors sa représentation graphique est une droite .



* Réciproquement, si la représentation graphique d'une fonction est une droite, alors cette fonction est affine.

Démonstrations : admise.

Remarque : la représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Vocabulaire : le coefficient de la fonction affine est appelé **coefficient directeur** ou **pente** de la droite.

c) Propriétés

Soit f une fonction affine de coefficient directeur a et d'ordonnée à l'origine b .

* L'ordonnée à l'origine d'une fonction affine est l'image de 0 par cette fonction, soit : $b = f(0)$.

Démonstration : évidente en calculant l'image de 0.

* Pour tous nombres x_1 et x_2 tels que : $x_1 \neq x_2$:

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Démonstration

$$f(x_1) - f(x_2) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2)$$

Comme $x_1 \neq x_2$, on peut diviser chaque membre de l'égalité par $(x_1 - x_2)$, ce qui donne le résultat.

d) Étude d'une fonction affine

* 1^{er} cas : on connaît l'expression

Soit la fonction f définie pour tout nombre x par : $f(x) = 2x - 3$.

Étude de f

$$f(x) = 2x - 3.$$

On reconnaît une expression de la forme $f(x) = ax + b$

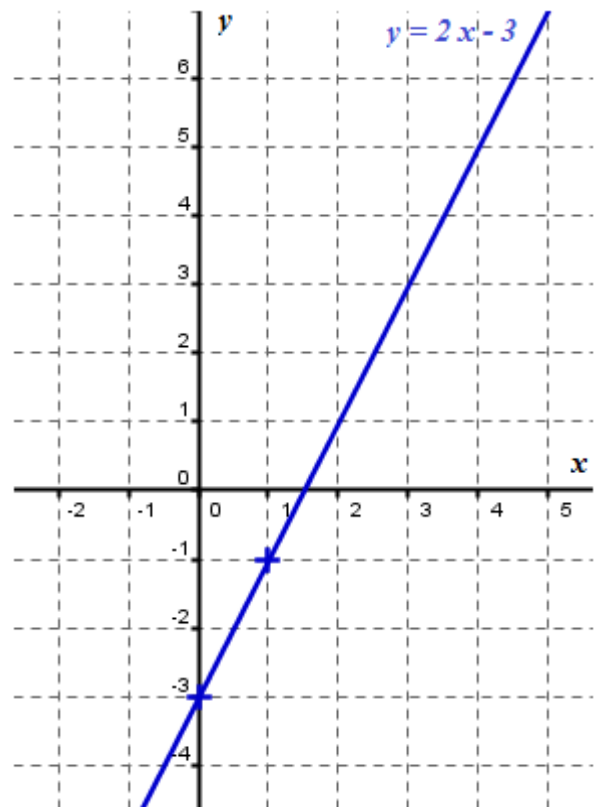
avec : $a = 2$ et $b = -3$ donc f une fonction affine.

Par conséquent sa représentation graphique est une droite.

Par ailleurs : $f(0) = -3$ et $f(1) = -1$.

Donc la droite passe par les points de coordonnées $(0; -3)$ et $(1; -1)$.

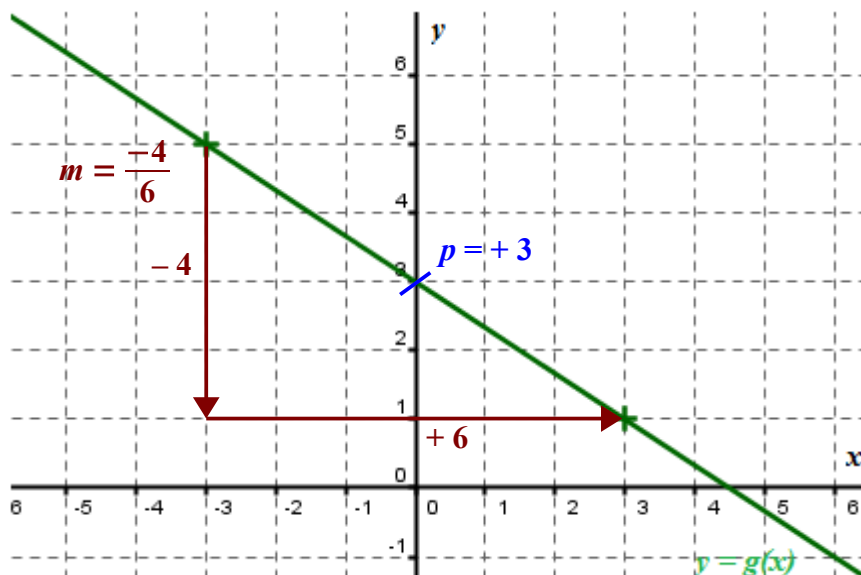
Représentation graphique



* 2^{ème} cas : on connaît deux nombres et leurs images

1^{ère} méthode : lecture graphique

Soit la fonction g définie par sa représentation graphique.



Étude de g

La représentation graphique de g est une droite.

Donc g est une fonction affine et son expression est de la forme $g(x) = mx + p$.

Par lecture graphique : $m = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$ et $p = +3$.

Par conséquent : $g(x) = -\frac{2}{3}x + 3$.