# Chapitre 2 – Proportionnalité dans le triangle

## 1- Triangles semblables

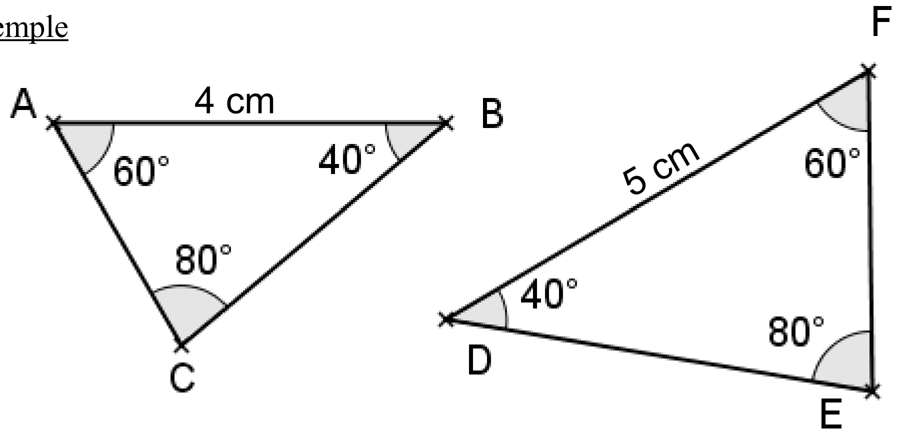
### a) Définitions

* Deux triangles **semblables** sont deux triangles qui ont les mêmes mesures d'angle.

* Les côtés opposés aux angles de même mesure de deux triangles semblables sont dit **homologues**.

* Deux triangles qui ont des côtés de mêmes longueurs sont **isométriques** ou **égaux**.

Exemple




Les triangles ABC et DEF sont semblables.

Les côtés [ AB ] et [ DF ] sont homologues, tout comme [ AC ] et [ EF ] ou [ BC ] et [ DE ].

Remarque

Des triangles isométriques sont semblables.

### b) Propriétés (admises)

* Si deux triangles ont deux angles de même mesure, alors ils sont semblables.

* Si deux triangles semblables ont deux côtés homologues de même mesure, alors ils sont isométriques.

* Si deux triangles sont semblables, alors leurs côtés homologues sont proportionnels.

* Réciproquement, si deux triangles ont des côtés proportionnels, alors ils sont semblables.

Exemple

Pour les triangles ABC et DEF précédents : $\dfrac{AB}{DF} = \dfrac{AC}{EF} = \dfrac{BC}{DE}$ .

### c) Méthode

Pour caractériser des triangles semblables connaissant les longueurs des côtés, on doit établir la proportionnalité entre les côtés homologues. Cela revient à démontrer que le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.

| Côtés | petits côtés | côtés médians | grands côtés |
|---|---|---|---|
| Triangle ABC | AC | CB | BA |
| Triangle DEF | FE | ED | DF |

## 2- Agrandissement-Réduction

Soit deux triangles semblables et $k$ le quotient des côtés homologues du premier et du second triangle.

Si $k < 1$ , alors le second triangle est une **réduction** du premier.

Si $k > 1$ , alors le second triangle est un **agrandissement** du premier.

Si $k = 1$ , alors les triangles sont isométriques.

Exemple

Pour les triangles ABC et DEF précédents :

* DEF est un agrandissement de ABC de coefficient $k = \frac{DF}{AB} = \frac{5\,cm}{4\,cm} = \frac{5}{4}$

* ABC est une réduction de DEF de coefficient $k' = \frac{AB}{DF} = \frac{4\,cm}{5\,cm} = \frac{4}{5}$

Remarque : les coefficients $k$ et $k'$ sont inverses.

## 3- Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les grandeurs géométriques

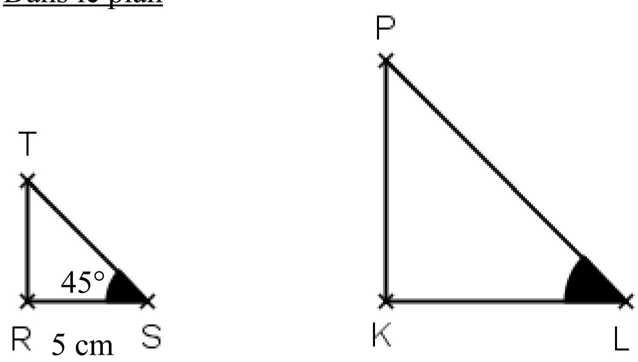
Propriété (admise)

Dans un agrandissement ou une réduction de coefficient $k$ :

* les mesures d'angle sont inchangées ;
* les longueurs sont multipliées par $k$ ;
* les aires sont multipliées par $k^2$ ;
* les volumes sont multipliés par $k^3$.

Exemples

1- Dans le plan




Aire(RST) = 12,5 cm²

KLP est un agrandissement de RST de rapport $k = 2$.

* $\widehat{PLK} = \widehat{TSR} = 45°$.

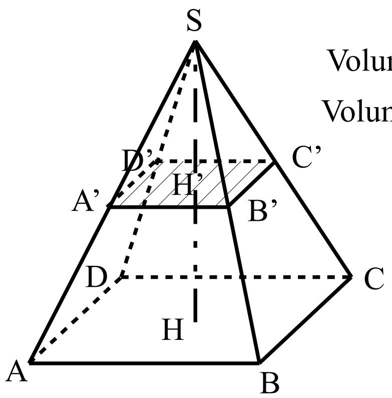
* $KL = k \times RS = 2 \times 5\text{ cm} = 10\text{ cm}$

* $\text{Aire(KLP)} = k^2 \times \text{Aire(RST)} = 2^2 \times 12{,}5\text{ cm}^2 = 50\text{ cm}^2$

2- Extension dans l'espace (en 3D)

Si on coupe une pyramide SABCD par un plan parallèle à sa base, on obtient une pyramide **réduite** SA'B'C'D'. Soit $k$ le coefficient de réduction.

$$k = \frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SH'}{SH}$$




Volume(SABCD) = $V$

Volume(SA'B'C'D') = $V'$

Si $V = 40$ cm³ et si $k = 0{,}5$ :

$V' = k^3 \times V = (0{,}5)^3 \times 40\text{ cm}^3 = 5\text{ cm}^3$

## 4- Théorème de Thalès

### a) Propriété directe

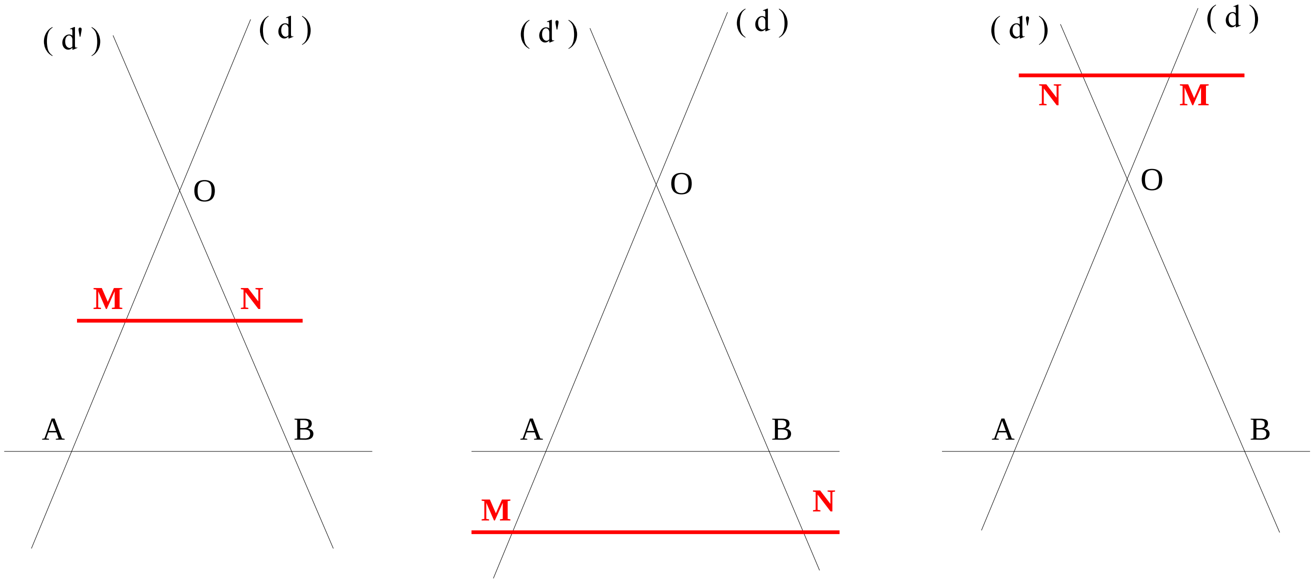
On considère deux droites ( d ) et ( d' ) sécantes en O.

Soit deux points A et M sur ( d ) et deux points B et N sur ( d' ) tous distincts de O.

Si ( MN ) // ( AB ) alors : $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{ON}{OB}$

Autrement dit : deux droites parallèles découpent deux droites sécantes dans des dimensions proportionnelles.

Remarque : on peut appliquer ce théorème dans les trois configurations ci-dessous.




### b) Conséquence

Avec les conditions précédentes, comme les dimensions du triangle OMN sont proportionnelles à celles

du triangle OAB : si ( MN ) // ( AB ) alors : $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{ON}{OB} = \dfrac{MN}{AB}$

Démonstrations : admises.

Remarque

Si deux des rapports $\dfrac{OM}{OA}$ , $\dfrac{ON}{OB}$ , $\dfrac{MN}{AB}$ sont différents alors ( MN ) et ( AB ) ne sont pas parallèles.

En effet, si ces droites étaient parallèles, d'après la propriété de Thalès, les rapports seraient égaux.

c) Propriété réciproque

On considère un triangle OAB.

Soit deux points M et N tels que O, M, A soient alignés dans le **même ordre** que O, N, B.

Si $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{ON}{OB}$ alors : ( MN ) // ( AB ).

Démonstration : admise.

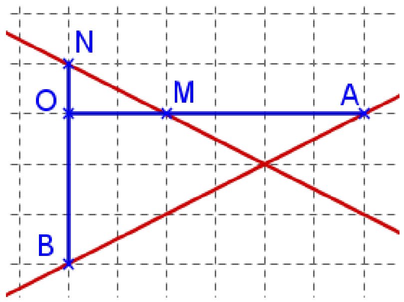
Remarques

* La propriété réciproque de Thalès permet de démontrer que des droites sont parallèles ;

**elle ne permet en aucun cas de démontrer que des droites ne sont pas parallèles !**

* La condition d'ordre dans l'alignement est indispensable comme le montre l'exemple ci-dessous.

OAB est un triangle et les points O, M, A sont alignés, de même que les points O, N, B.




D'une part : $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

D'autre part : $\dfrac{ON}{OB} = \dfrac{1}{3}$

On a donc bien : $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{ON}{OB}$

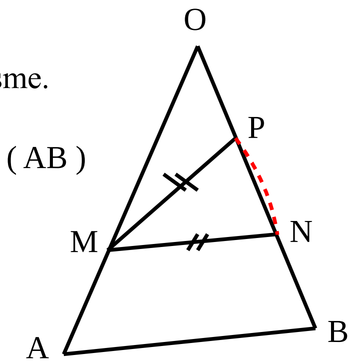
Pourtant ( MN ) et ( AB ) ne sont pas parallèles

* Le troisième rapport (issu de la conséquence) ne permet pas d'établir le parallélisme.

En effet pour la configuration ci-contre, on a : $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{MN}{AB}$ . ( MN ) // ( AB )

Mais on a donc aussi : $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{MP}{AB}$ car MP = MN.

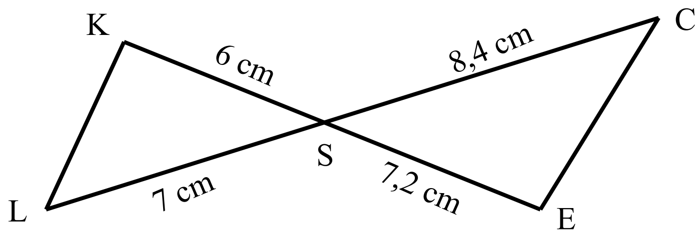
Pourtant, les droites ( MP ) et ( AB ) ne sont pas parallèles.




Rédaction des exercices

On considère la figure ci-contre.

Démontrer que les droites (KL) et (CE) sont parallèles.




**(KL) // (CE)**

Dans les triangles KLS et CES, les points K, S, E sont alignés dans le même ordre que les points L, S, C.

On compare alors les rapports : $\dfrac{SK}{SE}$ et $\dfrac{SL}{SC}$ .

$\dfrac{SK}{SE} = \dfrac{6\,\text{cm}}{7{,}2\,\text{cm}} = \dfrac{5}{6}$ et $\dfrac{SL}{SC} = \dfrac{7\,\text{cm}}{8{,}4\,\text{cm}} = \dfrac{5}{6}$ . On en déduit que : $\dfrac{SK}{SE} = \dfrac{SL}{SC}$ .

On peut donc utiliser la réciproque du théorème de Thalès et conclure que : (KL) // (CE).