Chapitre 10 – PGCD

1- Définitions

* Comme son nom l'indique, le **plus grand diviseur commun** (PGCD) à deux nombres entiers naturels est le plus grand nombre entier naturel qui divise ces deux nombres.

Si k est le PGCD de deux entiers naturels a et b, on note : $k = \text{PGCD} (a ; b)$.

* Si le PGCD de deux entiers naturels a et b est égal à 1, on dit que a et b sont **premiers entre eux**.
Dans ce cas, a et b n'ont que le nombre 1 comme diviseur commun.

* Remarques

1) Le nombre 1 étant un diviseur de tout entier, le PGCD k existe toujours et $k \geq 1$.

2) Pour tout nombre entier naturel a : $\text{PGCD} (a ; a) = a$.

3) Pour tout nombre entier naturel a : $\text{PGCD} (a ; 0) = a$.

2- Utilisation du PGCD

a) Définition

On considère deux nombres entiers naturels a et b non nuls.

Si les nombres a et b sont premiers entre eux, on dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est une **fraction irréductible**.

Dans ce cas, l'écriture de la fraction ne peut pas être simplifiée.

b) Propriété (*admise*)

Soit deux nombres entiers naturels a et b non nuls.

Si $k = \text{PGCD}(a ; b)$, alors la fraction $\frac{a}{b}$ peut être simplifiée par k et l'écriture simplifiée obtenue est irréductible.

Exemple : $\text{PGCD}(48 ; 72) = 24$ donc : $\frac{48}{72} = \frac{\cancel{24} \times 2}{\cancel{24} \times 3} = \frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3}$ est l'écriture irréductible de $\frac{48}{72}$.

3- Recherche du PGCD

a) Algorithme des différences successives

* Propriété : pour tous nombres entiers naturels a et b avec $a < b$, $\text{PGCD} (a ; b) = \text{PGCD} (a ; b - a)$.

* Exemple : on cherche le nombre $k = \text{PGCD} (54 ; 42)$.

$k = \text{PGCD} (42 ; 54 - 42) = \text{PGCD} (42 ; 12)$ — **On utilise une première fois la propriété.**

$k = \text{PGCD} (12 ; 42 - 12) = \text{PGCD} (12 ; 30)$ — **On utilise une deuxième fois la propriété.**

$k = \text{PGCD} (12 ; 30 - 12) = \text{PGCD} (12 ; 18)$ — **On utilise une troisième fois la propriété.**

$k = \text{PGCD} (12 ; 18 - 12) = \text{PGCD} (12 ; 6)$ — **On utilise une quatrième fois la propriété.**

$k = \text{PGCD} (6 ; 12 - 6) = \text{PGCD} (6 ; 6) = 6$ — **On utilise une cinquième fois la propriété.**

b) Algorithme d'Euclide

* Propriété

On considère deux nombres entiers naturels non nuls a et b avec $a < b$.

Si k = PGCD(a ; b) et si r est le reste dans la division euclidienne de b par a, alors k = PGCD(a ; r).

* Exemple

Soir k = PGCD(289 ; 85).

On effectue le division euclidienne de 289 par 85 : 289 = 85 * 3 + 34. Le reste est 34.

Donc : k = PGCD(85 ; 34).

On réitère le processus : 85 = 34 * 2 + 17. Le reste est 17.

Donc : k = PGCD(34 ; 17).

On réitère le processus : 34 = 17 * 2 + 0. Le reste est 0.

Donc : k = PGCD(17 ; 0).

$k = 17$ **(c'est le dernier reste non nul)**