

1- Propriétés

a) Distributivité simple

Pour tout nombre a, b, k : $k(a + b) = ka + kb$

b) Distributivité double

Pour tout nombre a, b, c, d : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

c) Identités Remarquables

* Carré d'une somme

Pour tout nombre a, b : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Autrement dit : le carré de la somme de deux nombres égale la somme de leurs carrés augmentée du double produit de ces deux nombres.

Démonstration

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{CQFD !}$$

* Carré d'une différence

Pour tout nombre a, b : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Autrement dit : le carré de la différence de deux nombres égale la somme de leurs carrés diminuée du double produit de ces deux nombres.

Démonstration

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{CQFD !}$$

* Produit des expressions « conjuguées »

Pour tout nombre a, b : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Autrement dit : le produit de la somme de deux nombres et de leur différence égale la différence de leurs carrés.

Démonstration

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2 \quad \text{CQFD !}$$

2- Factorisation d'une expression

Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

a) On connaît un facteur commun

Dans ce cas, on utilise la propriété : $ka + kb = k(a + b)$.

Exemples

$$* A(x) = 4x - 8$$

$$A(x) = 4x - 4 \times 2$$

$$\underline{A(x) = 4(x - 2)}$$

$$* B(x) = 3x - 3$$

$$B(x) = 3x - 3 \times 1$$

$$\underline{B(x) = 3(x - 1)}$$

$$* C(x) = (5x - 4)^2 - (3x + 2)(5x - 4)$$

$$C(x) = (5x - 4)(5x - 4) - (3x + 2)(5x - 4)$$

$$C(x) = (5x - 4)((5x - 4) - (3x + 2))$$

$$C(x) = (5x - 4)(5x - 4 - 3x - 2)$$

$$\underline{C(x) = (5x - 4)(2x - 6)}$$

b) On reconnaît une identité remarquable

On utilise alors une des propriétés :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Exemples

$$* A(x) = 25x^2 + 40x + 16$$

$$A(x) = (5x)^2 + 2(5x)(4) + (4)^2$$

$$\underline{A(x) = (5x + 4)^2}$$

$$* B(x) = 9x^2 - 4$$

$$B(x) = (3x)^2 - 2^2$$

$$\underline{B(x) = (3x + 2)(3x - 2)}$$

$$* C(x) = (3x + 6)^2 - 81$$

$$C(x) = (3x + 6)^2 - 9^2$$

$$C(x) = (3x + 6 + 9)(3x + 6 - 9)$$

$$\underline{C(x) = (3x + 15)(3x - 3)}$$

3- Équations « produit nul »

L'objectif de ce paragraphe est de résoudre certaines équations à une inconnue du second degré.

a) Vocabulaire

Soit deux expressions $A(x)$ et $B(x)$ de la variable x .

Toute équation de la forme $A(x) \times B(x) = 0$ est appelée **équation « produit nul »**.

b) Propriétés

* **Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit qu'un de ses facteurs soit nul.**

Autrement dit

Soit a et b deux nombres.

* Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $a \times b = 0$.

* Réciproquement, si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Démonstration

* La première partie de la propriété est évidente.

* Si $a \times b = 0$, on envisage deux cas.

Premier cas : supposons que a est nul. La propriété est alors démontrée.

Second cas : supposons que a est non nul. On peut alors multiplier chacun des membres de l'égalité par

l'inverse de a : $\frac{a \times b}{a} = \frac{0}{a}$. En simplifiant, on obtient : $b = 0$.

Conclusion : soit c'est a qui est nul (1^{er} cas), soit c'est b qui est nul (2^{ème} cas). **CQFD !**

* Conséquence : **Le carré d'un nombre est nul à la seule condition que ce nombre soit nul.**

c) Principe et méthode générale

On considère une équation du second degré.

* Si ce n'est pas le cas, on transpose pour que le second membre de cette équation soit nul.

* On factorise alors, si possible, le premier membre : on obtient ainsi une équation « produit nul ».

* On utilise la précédente propriété : on doit alors résoudre deux équations du premier degré.

d) Exemple d'application

Résoudre l'équation : $(3x - 5)(2x + 4) = 0$. **On reconnaît ici une équation « produit nul ».**

Or, si un produit est nul, alors un au moins de ses facteurs est nul (et réciproquement).

Donc : $3x - 5 = 0$ ou $2x + 4 = 0$

Soit : $x = \frac{5}{3}$ ou $x = -2$

Par conséquent, l'équation admet deux solutions : -2 et $\frac{5}{3}$.