Chapitre 5 – Fonctions linéaires et affines

1 – Fonctions linéaires

a) Définition

On appelle **fonction linéaire** toute fonction f dont l'expression peut s'écrire sous la forme $\boldsymbol{f(x) = a\,x}$ où a est une constante.

Ce nombre a est alors appelé **coefficient** de linéarité de la fonction linéaire f.

Remarque : lien avec la proportionnalité

* On considère deux grandeurs x et y telles que : y soit proportionnelle à x.
  En conséquence, il existe un nombre a tel que : $y = a\,x$.
  La fonction qui, à la grandeur x, associe la grandeur y est donc linéaire.

* Réciproquement, toute fonction linéaire représente une situation de proportionnalité.

b) Propriétés

Soit f une fonction linéaire de coefficient a.

* Le coefficient d'une fonction linéaire est l'image de 1 par cette fonction, soit : $\boxed{a = f(1)}$.

  Démonstration : évidente en calculant l'image de 1.

* Pour tout nombre x non nul : $\boxed{a = \dfrac{f(x)}{x}}$.

  Démonstration : évidente d'après la définition.

c) Représentation graphique

On considère un repère du plan.

* Si une fonction est linéaire, alors sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine.

* Réciproquement, si la représentation graphique d'une fonction est une droite qui passe par l'origine du repère, alors cette fonction est linéaire.

Démonstrations : admise.

d) Étude d'une fonction linéaire

* 1er cas : on connaît l'expression

Soit la fonction f définie pour tout nombre x par : $f(x) = \frac{2}{3}x$.

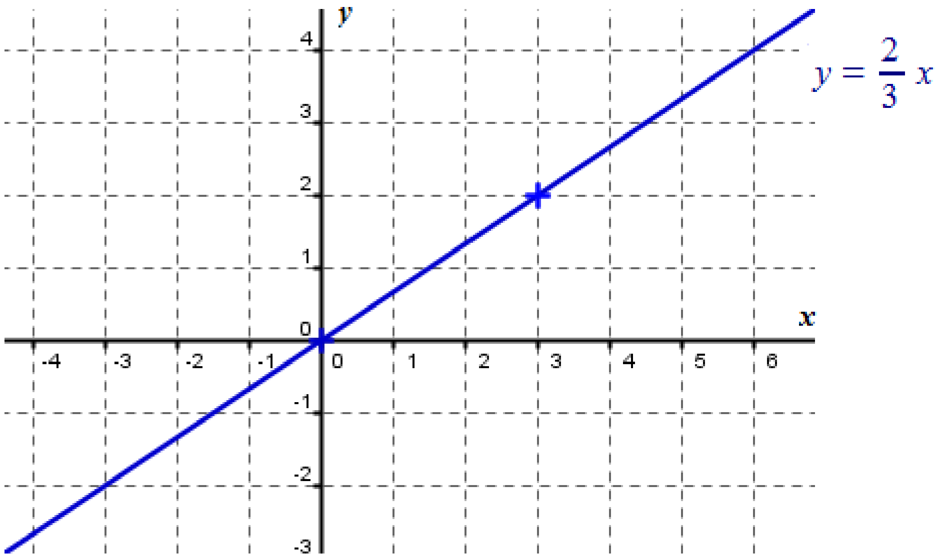
Étude de f

$f(x) = \frac{2}{3}x$. On reconnaît une expression de la forme $f(x) = a\,x$ avec : $a = \frac{2}{3}$ donc f est linéaire.

Par conséquent sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine.

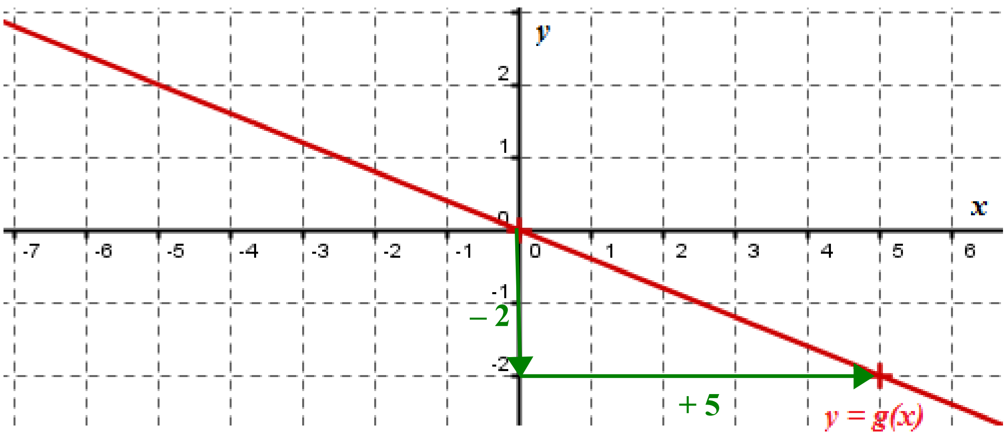
Par ailleurs : $f(3) = 2$. Donc la droite passe par le point de coordonnées (3 ; 2).

Représentation graphique



* 2ème cas : on connaît un nombre et son image

Soit la fonction g définie par sa représentation graphique.



Étude de g

La représentation graphique de g est une droite qui passe par l'origine.

Donc g est une fonction linéaire et son expression est de la forme $g(x) = k\,x$.

D'autre part, la droite passe par le point de coordonnées (5 ; – 2) ; par conséquent : $g(5) = -2$.

Or, pour tout nombre x non nul : $k = \frac{g(x)}{x}$. Donc, pour $x = 5$: $k = \frac{g(5)}{5} = \frac{-2}{5}$

Conclusion : pour tout nombre x, $\boxed{g(x) = -\frac{2}{5}x\ .}$

2 – Fonctions affines

a) Définition

On appelle **fonction affine** toute fonction f dont l'expression peut s'écrire sous la forme $\boldsymbol{f(x) = a\,x + b}$ où a et b sont des constantes.

Ce nombre a est appelé **coefficient directeur** de la fonction affine f.

Ce nombre b est appelé **ordonnée à l'origine** de la fonction affine f.

Remarques

* Si $b = 0$, l'expression devient $f(x) = a\,x$. On retrouve alors une fonction linéaire.

  Donc : toute fonction linéaire est aussi une fonction affine.

* Si $a = 0$, l'expression devient : $f(x) = b$. On obtient alors une fonction **constante**.

  Donc : toute fonction constante est aussi une fonction affine.

* Si $a = b = 0$, l'expression devient : $f(x) = 0$. On obtient alors la fonction **nulle**.

  Et la fonction nulle est linéaire, constante et donc affine.

b) Représentation graphique

On considère un repère du plan.

* Si une fonction est affine, alors sa représentation graphique est une droite (qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées).

* Réciproquement, si la représentation graphique d'une fonction est une droite (qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées), alors cette fonction est affine.

Démonstrations : admise.

Remarque : la représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

c) Propriétés

Soit f une fonction affine de coefficient directeur a et d'ordonnée à l'origine b.

* L'ordonnée à l'origine d'une fonction affine est l'image de 0 par cette fonction, soit : $\boxed{\boldsymbol{b = f(0)}\ .}$

  Démonstration : évidente en calculant l'image de 0.

* Pour tous nombres x_1 et x_2 tels que : $x_1 \neq x_2$: $\boxed{a = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}}$

  Démonstration

  $f(x_1) - f(x_2) = (\,a\,x_1 + b\,) - (\,a\,x_2 + b\,) = a\,x_1 \cancel{+b} - a\,x_2 \cancel{-b} = a\,(\,x_1 - x_2\,)$

  Comme $x_1 \neq x_2$, on peut diviser chaque membre de l'égalité par $(\,x_1 - x_2\,)$, ce qui donne le résultat.

d) Étude d'une fonction affine

* 1er cas : on connaît l'expression

Soit la fonction f définie pour tout nombre x par : $f(x) = 2x - 3$.

Étude de f

$f(x) = 2x - 3$.

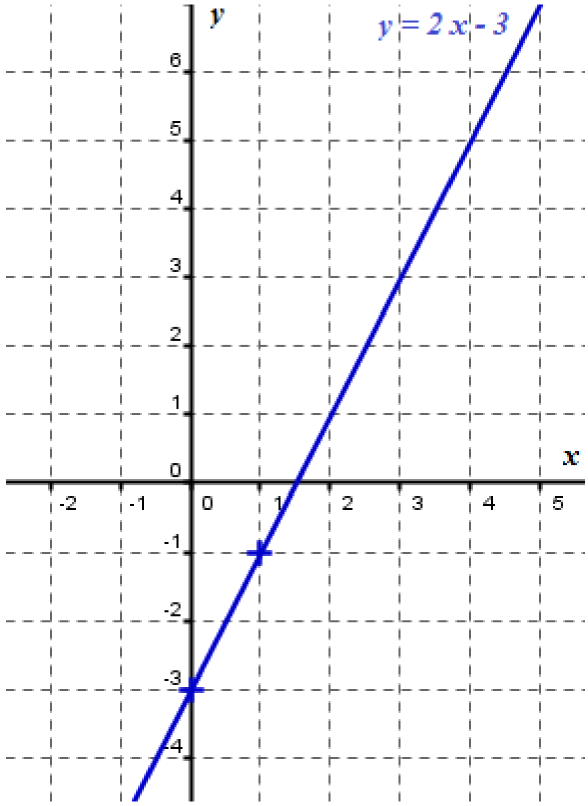
On reconnaît une expression de la forme $f(x) = ax + b$ avec : $a = 2$ et $b = -3$ donc f une fonction affine.

Par conséquent sa représentation graphique est une droite.

Par ailleurs : $f(0) = -3$ et $f(1) = -1$.

Donc la droite passe par les points de coordonnées $(0\,;-3)$ et $(1\,;-1)$.

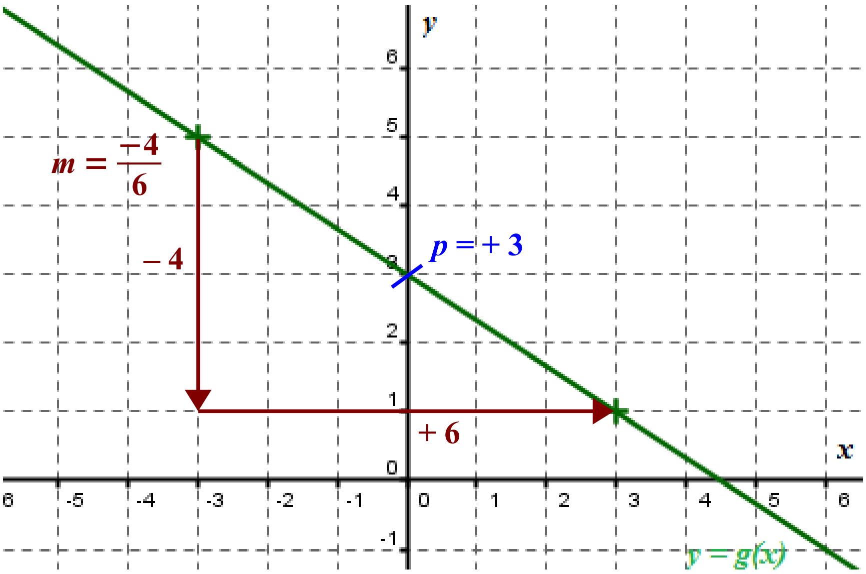
Représentation graphique



* 2ème cas : on connaît un nombre et son image

1ère méthode : lecture graphique

Soit la fonction g définie par sa représentation graphique.



Étude de g

La représentation graphique de g est une droite (qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées).

Donc g est une fonction affine et son expression est de la forme $g(x) = mx + p$.

Par lecture graphique : $m = \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3}$ et $p = +3$.

Par conséquent : $\boxed{g(x) = -\dfrac{2}{3}x + 3.}$

2ème méthode : calcul

Soit la fonction affine f telle que : $f(2) = 1$ et $f(5) = -5$.

On sait que f est une fonction affine, donc son expression est de la forme $f(x) = a\,x + b$.

De plus : $f(2) = 1$ donc, en remplaçant x par 2 dans l'expression de f : $2\,a + b = 1$.

Par ailleurs : $f(5) = -5$ donc, en remplaçant x par 5 dans l'expression de f : $5\,a + b = -5$.

On doit donc résoudre le système : $\begin{cases} 2\,a + b = 1 \\ 5\,a + b = -5 \end{cases}$

Après résolution, on trouve : $a = -2$ et $b = 5$.

Par conséquent : $\boxed{f(x) = -2\,x + 5}$